ATTI

DELLA

ACCADEMIA GIOENIA

DI SCIENZE NATURALI

IN CATANIA

ANNO LXVII

1890-91.

SERIE QUARTA

VOLUME III.

CATANIA
COI TIPI C. GALÀTOLA
1891.

ATTI

DELLA

ACCADEMIA GIOENIA

DI SCIENZE NATURALI

IN CATANIA

ANNO LXVII

1890-91.

SERIE QUARTA

VOLUME III.

CATANIA
COI TIPI C. GALÀTOLA
1891.

CARICHE ACCADEMICHE

PER L'ANNO 1891 - 92.

UFFICIO DI PRESIDENZA

ZURRIA Comm. Prof. GIUSEPPE — *Presidente*

TOMASELLI Comm. Prof. SALVATORE — *Vice Presidente*

BARTOLI Prof. ADOLFO — *Segretario Generale*

GRASSI Prof. D.r GIAMBATTISTA — *Segretario della Sezione di Scienze naturali*

MOLLAME Cav. Prof. VINCENZO — *Segretario della Sezione di Scienze fisico-matematiche*

CONSIGLIO D' AMMINISTRAZIONE

SCIUTO - PATTI Cav. Prof. CARMELO

BERRETTA Cav. Uff. Prof. PAOLO

ARDINI Prof. D.r GIUSEPPE

ORSINI FARAONE Prof. D.r ANGELO

CAFICI Rev. P. GIOVANNI — *Cassiere.*

SOCII EFFETTIVI

1. **TORNABENE** cav. prof. Francesco
2. **ZURRIA** comm. prof. Giuseppe
3. **CAFICI** p. Giovanni
4. **NICOLOSI TIRRIZZI** cav. prof. Salvatore
5. **BERRETTA** cav. uff. prof. Paolo
6. **SCIUTO-PATTI** cav. prof. Carmelo
7. **ARDINI** prof. Giuseppe
8. **TOMASELLI** comm. prof. Salvatore
9. **CLEMENTI** cav. uff. prof. Gesualdo
10. **ORSINI FARAONE** prof. Angelo
11. **RONSISVALLE** cav. prof. Mario
12. **BASILE** prof. Gioachino
13. **CAPPARELLI** prof. Andrea
14. **MOLLAME** prof. Vincenzo
15. **ARADAS** prof. Salvatore
16. **SANGIULIANO** Marchese Antonino
17. **GRASSI** prof. Giambattista
18. **AMATO** prof. Domenico
19. **BARTOLI** prof. Adolfo
20. **UGHETTI** prof. Giabattista
21. **FERRARI** prof. Primo
22. **FICHERA** cav. prof. Filadelfo
23. **CHIZZONI** prof. Francesco
24. **FELETTI** prof. Raimondo
25. **PENNACCHIETTI** prof. Giovanni
26. **PETRONE** prof. Angelo

27. . . . .

28. . . . .

29. . . . .

30. . . . .

Sugl' integrali comuni a più sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Nota del prof. G. PENNACCHIETTI

letta all'Accademia Gioenia nell'adunanza del dì 28 dicembre 1890.

Nella nota [1], che ho avuto testè l'onore di presentare all'Accademia, ho adoperato, per la determinazione degl'integrali primi comuni a più sistemi di m equazioni differenziali ordinarie di second' ordine, contenenti altrettante funzioni incognite di una variabile indipendente, un metodo, che si può estendere non solo alla determinazione degl'integrali d'ordine $n-1$, comuni a più sistemi di m equazioni differenziali ordinarie di n^{esimo} ordine tra un egual numero di funzioni incognite di una stessa variabile, ma ancora, più generalmente, alla determinazione degl' integrali comuni a più sistemi di m equazioni differenziali ordinarie di prim' ordine con m funzioni incognite.

Siano infatti:

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s \,, \tag{1}$$

$$(s = 1, 2, \ldots m)$$

$$\frac{dy_s}{dt} = Z_s \tag{2}$$

due distinti sistemi, composti, ciascuno, di m equazioni differenziali ordinarie di prim' ordine, essendo le Y_s, Z_s funzioni di t, y_1, $y_2, \ldots, y_m$.

Se

$$F(t, y_1, y_2, \ldots y_m) = a,$$

[1] Sugl' integrali delle equazioni della dinamica — Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania. Vol. II, Serie 4ª 1890.

essendo a una costante arbitraria, è un integrale comune ai due sistemi, si dovrà avere identicamente, qualunque siano i valori di $t, y_1, y_2, \dots y_m$:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial y_1} Y_1 + \dfrac{\partial F}{\partial y_2} Y_2 + \dots + \dfrac{\partial F}{\partial y_m} Y_m = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial y_1} Z_1 + \dfrac{\partial F}{\partial y_2} Z_2 + \dots + \dfrac{\partial F}{\partial y_m} Z_m = 0.\end{array}\right\} \tag{3}$$

Ora i due sistemi (1), (2) non possono essere distinti, senza che due almeno, p. es. Y_1, Z_1, delle quantità corrispondenti Y_s, Z_s siano differenti l' una dall' altra. Perciò si può porre:

$$k_r = \frac{Y_{r+1} - Z_{r+1}}{Y_1 - Z_1}\,, \tag{4}$$

$$(r = 1\,,\ 2 \dots m-1)$$

$$l_r = Y_{r+1} - k_r Y_1\,. \tag{5}$$

Si avrà:

$$l_r = Z_{r+1} - k_r Z_1\,, \tag{6}$$

o anche:

$$l_r = \frac{Z_{r+1}\, Y_1 - Y_{r+1}\, Z_1}{Y_1 - Z_1}\,. \tag{7}$$

Il sistema (3) può allora trasformarsi nel seguente:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y_2} l_1 + \frac{\partial F}{\partial y_3} l_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_m} l_{m-1} = 0\,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial y_2} k_1 + \frac{\partial F}{\partial y_3} k_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_m} k_{m-1} = 0. \tag{9}$$

In generale il sistema (8), (9) non può ammettere un dato numero h di soluzioni, se i coefficienti delle derivate parziali non soddisfino ad equazioni differenziali parziali, che si determinano

mediante le note condizioni d' integrabilità, fornite dalla teoria delle equazioni differenziali parziali simultanee di prim' ordine. Se nel sistema (8), (9), e contemporaneamente nelle (5), in luogo delle quantità k_r, l_r, si sostituiscono funzioni delle variabili indipendenti t, y_1, y_2,... y_m, tali che il sistema (8), (9) ammetta h soluzioni, queste soluzioni converranno agl'infiniti sistemi (1), i cui secondi membri, considerati come funzioni delle variabili indipendenti t, y_1, y_2,... y_m, soddisfino alle condizioni (5), o, ciò che è lo stesso, converranno a tutti i sistemi (2), i cui secondi membri soddisfino alle condizioni (6).

Supponiamo, p. es., che i due sistemi (1), (2) ammettano $m-1$ integrali comuni, e consideriamo dapprima in particolare i due casi, sebbene estremamente semplici, in cui gli $m-1$ integrali non contengano una delle variabili y_1, ovvero t.

Nel primo caso si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0\,, \qquad k_r = 0\,, \qquad \frac{\partial l_r}{\partial y_1} = 0\,,$$

cioè tutti i possibili sistemi, che hanno $m-1$ integrali comuni, non contenenti y_1, sono compresi nel sistema:

$$\frac{dy_1}{dt} = Y_1(t,\, y_1,\, y_2, \ldots y_m)\,,$$
$$\frac{dy_{r+1}}{dt} = Y_{r+1}(t,\, y_2,\, y_3, \ldots y_m)\,, \qquad (r = 1,\, 2, \ldots\, m-1)$$

differendo un sistema dall' altro soltanto per la prima equazione.

In particolare, se $m=2n$, e si pone:

$$y_{n+i} = p_i\,, \qquad (i = 1\,,\, 2, \ldots\, n)\,, \tag{10}$$

il sistema (1) non può ammettere il sistema dei $2n-1$ integrali, non contenenti esplicitamente y_1, in comune col sistema canonico:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y_i}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1\,,\, 2, \ldots\, n) \tag{11}$$

dove H non contenga esplicitamente y_1, a meno che il sistema (1) stesso non abbia la forma:

$$\frac{dy_1}{dt} = Y_1 (t, y_1, y_2, \ldots y_m),$$

$$\frac{dp_1}{dt} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_{i+1}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_{i+1}}, \\ \frac{dp_{i+1}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y_{i+1}}, \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

del quale le ultime $2n-2$ equazioni formano un sistema canonico.

Nel secondo caso si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \qquad l_r = 0, \qquad \frac{\partial k_r}{\partial t} = 0,$$

e quindi la condizione necessaria e sufficiente, affinchè i sistemi (1), (2) abbiano in comune $m-1$ integrali, non contenenti esplicitamente t, è che si abbia:

$$Z_{r+1} = k_r (y_1, y_2, \ldots y_m) Z_1, \qquad (r = 1, 2, \ldots m-1) \tag{12}$$

$$Y_s = \lambda (t, y_1, y_2, \ldots y_m) Z_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots m)$$

essendo Z_1 e λ funzioni qualunque di $t, y_1, y_2, \ldots y_m$. Gli $m-1$ integrali saranno le $m-1$ soluzioni dell'equazione (9), e converranno a tutti quei sistemi (2), nei quali le Z_s soddisfino alle $m-1$ condizioni (12).

Se nè Z_1, nè, per conseguenza, $Z_2, Z_3, \ldots Z_m$, contengono esplicitamente t, la condizione necessaria e sufficiente, affinchè i si-

stemi (1), (2) abbiano $m-1$ integrali comuni, non contenenti esplicitamente t, è che il sistema (1) abbia la forma:

$$\frac{dy_s}{dt} = \lambda Z_s ,$$

essendo λ una funzione qualunque di $t, y_1, y_2, \dots y_m$.

In particolare, se $m=2n$, e si fa la posizione (10), il sistema (1) non può ammettere i $2n-1$ integrali, non contenenti esplicitamente t, in comune col sistema canonico (11), nel quale H non contenga esplicitamente t, a meno che il sistema (1) stesso non abbia la forma:

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = - \lambda \frac{\partial H}{\partial y_i} ,$$

essendo λ una funzione qualunque di $t, y_1, y_2, \dots y_n, p_1, p_2, \dots p_n$.

Passando al caso generale, poniamo:

$$A(F) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y_2} l_1 + \frac{\partial F}{\partial y_3} l_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_m} l_{m-1} ,$$

$$B(F) = \frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial y_2} k_1 + \frac{\partial F}{\partial y_3} k_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_m} k_{m-1} .$$

Le equazioni (8), (9) non possono ammettere soluzioni comuni, senza che si abbia ancora:

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} \left\{ A(k_1) - B(l_1) \right\} + \frac{\partial F}{\partial y_3} \left\{ A(k_2) - B(l_2) \right\} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_m} \left\{ A(k_{m-1}) - B(l_{m-1}) \right\} = 0. \quad (13)$$

Se si richiede che il sistema (8), (9) ammetta $m-1$ soluzioni, l'equazione (13) dev' essere soddisfatta identicamente, ovvero deve essere combinazione algebrica delle equazioni (8), (9). Ma la (13) non può essere una conseguenza algebrica delle equazioni (8) (9),

perchè da queste due equazioni non si possono eliminare le derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial y_1}$. Perciò la (13) dev' essere identicamente soddisfatta. Si ha così:

$$A(k_1) - B(l_1) = 0,$$

$$A(k_2) - B(l_2) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A(k_{m-1}) - B(l_{m-1}) = 0.$$

ossia:

$$\frac{\partial k_r}{\partial t} + \frac{\partial k_r}{\partial y_2} l_1 + \frac{\partial k_r}{\partial y_3} l_2 + \ldots + \frac{\partial k_r}{\partial y_m} l_{m-1} - \frac{\partial l_r}{\partial y_1} - \frac{\partial l_r}{\partial y_2} k_1 - \ldots - \frac{\partial l_r}{\partial y_m} k_{m-1} = 0. \quad (14)$$

Se per mezzo delle (4), (7) si eliminano le k, l dalle (14), si avranno $m-1$ equazioni, che contengono le derivate parziali di prim'ordine delle Y_s, Z_s, e che esprimono le condizioni necessarie e sufficienti, a cui devono soddisfare le Y_s, Z_s, affinchè i due sistemi (1), (2) ammettano $m-1$ integrali comuni. Se sono date le Y_s, Z_s, in modo, che quest' ultime equazioni differenziali siano identicamente soddisfatte, e se le espressioni corrispondenti delle k_r, l_r, si sostituiscono nelle (5), (8), (9), il sistema (8), (9) ammetterà $m-1$ soluzioni, che saranno $m-1$ integrali comuni non solo ai due sistemi dati (1), (2), ma ancora a tutti gli altri sistemi (1), i cui secondi membri soddisfino alle condizioni (5). Se il sistema (2) è dato, ed è canonico, risulteranno determinate le condizioni, a cui deve soddisfare un altro sistema qualsiasi (1), affinchè questo abbia in comune $m-1$ integrali col sistema canonico dato.

I problemi chimici dell'epoca presente del prof. V. MEYER ed Il nuovo indirizzo da darsi alla Chimica del prof. D. AMATO.

Raffronti e ragguagli

di

D. AMATO

Memoria letta all'Accademia Gioenia nell'adunanza del dì 30 Novembre 1890.

Tre anni or sono, nell' ottobre del 1887, lessi in una seduta straordinaria di questa Accademia un mio lavoro col titolo: *Studii sperimentali e considerazioni teoriche sopra un nuovo indirizzo da darsi alla chimica.* E siccome in questo lavoro emettevo concetti nuovi e tali da farmi temere, come sempre avviene in simili casi, d' incontrare opposizione nelle vecchie teorie, io esordivo col dire che pubblicavo con animo perplesso le mie vedute e i miei risultati.

Epperò poco tempo dopo da questa mia lettura, io ebbi il piacere che una voce autorevole, quella del professore Iacopo Moleschott, si levasse in sostegno delle mie idee. Questo dotto infatti nel suo discorso letto nella ricorrenza della solenne apertura dell' Università di Roma, si pronunziava, nel concetto generale, identicamente a me. Cosicchè io sentii il bisogno di far precedere a quel mio lavoro, a guisa di proemio, il seguente brano: " I concetti " che vado a svolgere in questo lavoro e che comunicai a questa " Accademia il 17 ottobre ultimo—le idee cioè concernenti l' unità " della scienza; l' intimo legame di tutte le scienze fra di loro; la " necessità di scoprire altre forme di energia ; il non essere tutte, " queste forme , quelle che oggi possediamo; la possibilità della " formazione della cellula; la necessità di partire , per conseguir

“ ciò, dalla sintesi delle sostanze organiche naturali e specialmente
“ dalle sostanze albuminoidi; il giovarsi, la biologia e la zoologia,
“ della paleontologia; la grande importanza dello studio dei pri-
“ missimi esseri viventi, dei Protisti; ed il considerare il carbonio
“ quale elemento eminentemente biologico e causa prima della vi-
“ ta — queste idee dico sono state pronunziate nel novembre ulti-
“ mo dal prof. Moleschott, ed io sono lieto di avere prevenuto in
“ questo il sommo fisiologo di Roma. „

Ma il prof. Moleschott, benchè fornito di grande vastità di cognizioni, non è un chimico e mi si poteva allora obiettare, che, per il trionfo delle mie idee, la voce di un chimico sarebbe stata ancora più autorevole. Questa voce non si fece a lungo aspettare. Due anni dopo dalla mia pubblicazione, il professore Vittorio Meyer dell' Università di Heidelberga, uno dei più sommi chimici della Germania, il successore di Roberto Bunsen, nel Congresso dei Medici e Naturalisti tedeschi, tenuto nel settembre dell' anno passato in Heidelberga, pronunziava un discorso col titolo di *Problemi chimici dell'epoca presente*, che è bene dirlo, fu accolto da unanimi applausi da centinaia di naturalisti fra i quali i più eminenti chimici d' Europa. Ora tra i concetti svolti nel suo discorso da quest' ultimo e quelli pubblicati nel mio lavoro vi è tale unità di propositi e tale coincidenza di fatti, che se non fosse che io li abbia pubblicati due anni prima, e se non conoscessi che i tedeschi difficilmente leggono i lavori italiani di chimica, direi che l' uno ha copiato l' altro. E questa coincidenza è tanto più significante, quando si pensa che trattiamo temi opposti: infatti mentre il professore Meyer fa l' elogio della scienza, io tratto il tema di un nuovo indirizzo da dare alla medesima. Ma la verità, o Signori, è sempre la stessa da qualunque lato essa si guarda.

Io quindi oggi mi propongo di comunicare a questa Accademia alcuni ragguagli tra i concetti svolti nel nominato mio lavoro e quelli svolti dal professore Meyer nel prefato suo discorso, e ciò allo scopo di far rilevare la perfetta coincidenza tra le mie idee e quelle di quest' ultimo. E sono lieto di comunicare ciò alla nostra

Accademia, non solo per la coincidenza dei miei trovati con quelli di uno dei più valenti chimici della Germania, ma ancora perchè mi assicurano che nel mio lavoro non mi sono allontanato dal vero e mi persuadono a perseverare sempre più in queste mie ricerche, colla speranza che mi si vorrà compatire se mi allontano dalle opinioni di persone, le quali hanno reso alla scienza grandissimi servizi, che io sono il primo ad apprezzare altamente.

A chi poi nel leggere quel mio lavoro, qualche giudizio avesse potuto sembrare un po' aspro, mi permetto osservare che il professore Meyer non è stato meno aspro di me. Ed infatti, cosa si dovrebbe dire di quest' ultimo quando parla di stato d' *infanzia* della nostra scienza? quando afferma che il chimico per la sua scienza ha fatto *quasi nulla* in confronto di quanto ha fatto per essa la scoperta di Newton? quando parla di *errori fatali* commessi dal chimico a causa di avere studiato da un solo punto di vista la sua scienza? e di tante altre di simili cose di cui qui taccio per non ripetermi nel seguito della presente lettura? Certo non si dirà del Meyer ch' egli col dir ciò abbia avuto l' idea d' infliggere un biasimo ai suoi contemporanei.

Premesse queste considerazioni entro subito in argomento.

Lo scopo della presente lettura, come ho detto, è quello di fare rilevare la perfetta coincidenza delle mie idee con quelle del professore Meyer. E nel far ciò io mi servirò da una parte del citato mio lavoro " sul nuovo indirizzo da darsi alla chimica „ (1), che coadiuverò con quello del " carbonio quale base del mondo organico „ (2),e dall' altra parte del prelodato discorso dell' illustre professore di chimica dell' Università di Heidelberga (3).

Onde comincio col dire:

---

(1) Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali di Catania, Serie 3ª, vol. XX, p. 153, anno 1888.

(2) Catania tipografia dei Fratelli Galati—1885.

(3) *Tageblatt der versammlung deutscher Naturforscher und Ärtze in Heidelberg, p. 126, anno 1890.*

I.

Il professore Meyer a p. 126 del *Tageblatt* citato nella nota precedente, alle cui pagine da qui innanzi io mi riferirò, dice quanto segue: " Dovendo il chimico parlare dei *progressi* che ha fatto la " sua scienza è costretto a *confessare* che, a differenza dell' *astro-* " *nomo,* del *fisico* e del *matematico,* tratta con animo *perplesso* un " tale tema. „

Io, molto più mite nei miei apprezzamenti dell'illustre autore, nelle pagine 15 e 16 del mio opuscolo sul *Carbonio* quale base del mondo organico, ed alle pagine 28 e 29 del *mio lavoro* sul nuovo indirizzo da dare alla chimica, mi esprimo così: " La chi- " mica in genere e la chimica organica in specie hanno certa- " mente sintetizzato molti corpi naturali; ma a me sembra che " hanno *progredito lentamente* nel campo delle teorie. La *fisica,* la " *termo-chimica,* la *matematica,* l' *astronomia,* etc. hanno arricchito " la scienza d'importanti novità teoriche. Ma la chimica in genere " e la chimica organica in specie non fanno che *ripetere* cose ana- " loghe alle già fatte. „

Come vedete, l'autore dice: che il chimico tratta con animo perplesso il tema dei progressi che ha fatto la sua scienza, ma che così non avviene per lo astronomo, il fisico ed il matematico. Io dico: che la chimica ha progredito lentamente nel campo delle teorie, ma che così non hanno fatto la fisica, la termo-chimica, la matematica e l'astronomia.

II.

Nella medesima pagina 126 il professore Meyer dice: " Il più " grande fra i naturalisti tedeschi dei nostri giorni, fece suo il " giudizio di Kant sulla chimica, il quale disse che questa, dicasi " pure una scienza, *non è tale* nel suo più alto significato della " parola. Non bisogna considerare un tale apprezzamento come un

" biasmo, ma come un esatto riconoscimento delle condizioni *at-*
" *tuali* della *nuova chimica.* „ Ed a pagina 127 soggiunge ; " La
" chimica dei *tempi d' oggi* è quella che era l'astronomia ai tempi
" di Keplero e di Copernico. „

È chiaro che l' autore con ciò vuol significare che la nostra scienza, in quanto a progresso scientifico nel vero senso della parola, ne ha fatto bèn poco. Ora io a pagina 18 del *mio lavoro sul nuovo indirizzo*, etc. (1), dico: " La chimica *attuale* è guidata
" nelle sue investigazioni da un principio mal formulato e solo in
" parte esatto ; e che per conseguenza (2) si assiste tuttodì allo
" spettacolo di vedere il chimico vagare da incertezza in incertezza
" ed a spesso fallire nei suoi tentativi. „ Ed a pagina 16 del mio opuscolo sul *Carbonio* quale base etc. dico, che la chimica nel campo teorico ha progredito lentamente e che la chimica organica in specie si trova in ristagno di 29 anni. Ed infine alle pagine 27 e 29 del *mio lavoro*, ripetendo il medesimo concetto, prosieguo a dire che l' *attuale* chimica, in quanto *a teoria* pura e semplice, non ha fatto quei progressi che hanno fatto le sue consorelle.

III.

Il professore Meyer prosiegue a dire a pagina 127 e ripete quasi lo stesso a pagina 134 (v. Capitolo XX del presente ragguaglio): " Se ogni studio della natura si prefigge lo scopo di
" esporre i suoi trovati scientifici in forma *matematica*, una scienza
" come la nostra la quale è tanto lontana da questa meta da essere
" ancora in cerca della via che deve tenere per raggiungerla, deve
" considerarsi ancora nello stato d' *infanzia.* Ma verrà il tempo in
" cui la chimica subirà questo grande cambiamento. „

(1) Quando parlo di *mio lavoro*, da qui innanzi intenderò riferirmi a quello del *nuovo indirizzo da dare alla chimica.*

(2) Qui mi occorre dichiarare che io, durante la mia esposizione, per maggiore chiarezza, qualche volta sono obbligato a suntare e qualche volta a ripetermi ; ma che sarò fedele al concetto.

Io pure, a pagina 26 del nominato mio lavoro, faccio rilevare il bisogno del trattamento matematico della nostra scienza, e dico così: " Questo ignoto (ignoto che spiego prima) non si raggiungerà " se non si farà maggiore attenzione ai *movimenti* delle ultime par- " ticelle della materia, se non si tiene insomma in maggior conto " lo studio della *termo-chimica*. Non è bene dimenticare che i fe- " nomeni chimici, essendo effetti di movimento, devono per forza " sottostare alle leggi generali della *meccanica*. „ E per fare rilevare, come dice l' autore, che verrà il tempo in cui la chimica subirà questo grande cambiamento, dico a p. 16 del mio opuscolo sul *Carbonio*: " Io però non dispero per l'avvenire di questa inte- " ressante branca di scienza, e questa speranza la fondo nei giovani " chimici e nella gioventù nascente; essi, ne ho fiducia, sapranno " colmare la lacuna che noi forse lasceremo. „

IV.

Nella medesima pagina 127 il professore Meyer dice: " *In* " *ogni scienza* oltre alla ragione deve assistere un' altra potenza: " la *fantasia*. Epperò la sua influenza sopra una disciplina è tanto " più grande quanto questa è più *lontana* dallo stato di scienza. " E così avviene che nella *chimica odierna* la fantasia e la *intui-* " *zione* hanno una parte più grande che nelle altre scienze. Queste " idee non arriva ad intenderle per nulla colui che conosce la chi- " mica solamente dalla tradizione dei fatti completamente chiariti, " o colui che fa consistere il vero spirito della indagine chi- " mica nel misurare i processi fisici che accompagnano i trovati " chimici. In questa circostanza lo intelletto si apre solo a colui " che si slancia nel mare dell' incognito, come quello che oggi " giace sparso innanzi a noi nella chimica organica, etc. — Infatti " i più sorprendenti successi *sperimentali* in chimica organica si " sono ottenuti per mezzo d' *intuizioni, che potranno essere spiegate*, " allorquando i progressi della chimica avvieranno questa scienza " alle discipline *fisico-matematiche*. „

Io alle pagine 5-6 del nominato mio opuscolo sul *Carbonio* dico: " Io non sono di quelli che amano far pompa di teorie, ma " d'altra parte non giudico ben fatto lo *eccedere nel senso opposto.* " Non bastano i fatti; ci vuole l' *immaginazione* che *intuisce,* etc. " E credete voi che vi sia opera d'ingegno scompagnato dal lavorio " segreto, ed alle volte inconsapevole della immaginazione? Non " ve ne ha neanche nelle matematiche, nelle quali non solo la geo- " metria descrittiva, che chiamano la poesia di esse, ma qualsiasi " indagine richiede che il calcolo sia guidato da leggi ed anche " da lampi d' ingegno, *la cui verità* non è dimostrata a bella pri- " ma. Essi servono a rischiarare la via della ricerca: se resistono " sono lampi di buona luce che scortano il viandante alla meta, " se la sostanza è cattiva la fiamma si estingue. „

Come vedete, io dico: Non bastano i fatti, ci vuole l'*immaginazione che intuisce:* ed il Meyer dice: nella chimica la *fantasia* e la *intuizione* hanno una gran parte. Io dico: e credete che vi sia *opera d'ingegno* scompagnata dal lavorio segreto della immaginazione? ed il Meyer: *in ogni scienza* oltre alla ragione deve assistere la *fantasia.* Io dico: la cui verità (la verità delle intuizioni) non può essere dimostrata a bella prima; ed il Meyer: che saranno spiegate (le intuizioni s' intende) allorquando la scienza sarà avviata, etc.

V.

Il professore Meyer nella stessa p. 127 parla così: " La ra- " gione di questo singolare metodo d' investigazione chimica (il " metodo intuitivo) non si può esprimere in parole. Basta dire, " che senza questo metodo le più brillanti scoperte nella sintesi " organica non si sarebbero potute fare: E a modo di esempio dice: " Kekule intuì, in opposizione a tutti i dati che si leggevano nella " letteratura chimica, che non poteva esistere un isomero del mo- " nocloro benzol, etc. Per intuir questo bisognava possedere un " *istinto chimico* pronunziato. E come altro esempio soggiunge: Esi-

" stendo l' ossido di etileno, non vi era ragione logica di non am-
" mettere l' esistenza dell' ossido di fenileno; e pure vi fu chi ciò
" l'intuì, e l' esperimento gli diede ragione. Ma per intuir questo lo
" scienziato ha dovuto essere guidato da un *sentimento chimico* tutto
" proprio; imperocchè nello stato attuale della scienza non ci si
" arriva in forza di un ragionamento. „

A questo capitolo, dove si parla di *metodo intuitivo,* d' *istinto chimico,* di *sentimento chimico,* risponde il concetto generale di tutti e due i miei opuscoli, quello sul *Carbonio* e quello sul *nuovo indirizzo,* ed in particolar modo regge quello ch' è stato da me detto or ora al capitolo IV. (v. p. 13).

VI.

Tra le p. 127 e 128 il prefato professore Meyer dice: " Prima
" che la chimica possa essere maneggiata con processi *fisico-mate-*
" *matici,* deve rispondere alle seguenti domande: Che cosa è l' af-
" finità chimica? (1) che cosa è una valenza?—Per risolvere questo
" quesito è necessario che la chimica si metta in un laborioso la-
" voro. E poi a p. 130, parlando della rotazione o no degli atomi
" del carbonio uniti, stereochimicamente parlando, con una sola
" delle loro valenze, soggiunge: Per svolgere questo concetto siamo
" obbligati a parlare nuovamente della natura delle valenze, intor-
" no alla quale è necessario *confessare che lottiamo coll' incertezza.* „

È chiaro che l' autore voglia con ciò significare che intorno alla natura delle valenze noi non abbiamo nulla di positivo. Or bene io a p. 9 del nominato mio opuscolo sul *Carbonio,* onde fare rilevare la poca importanza da attribuire alla quistione delle *valen-*

---

(1) La parola affinità i chimici l' adoperano spesso come sinonimo di valenza e spesso come esprimente la preferenza che spiegano alcuni corpi a combinarsi con un corpo piuttosto che con un altro. Fu Wenzel che pubblicando le sue esperienze sui rapporti degli elementi che si combinano fra di loro pubblicò a Dresda nell' anno 1777 una memoria intitolata *Teoria delle affinità dei corpi.*

ze, dico: " Questa interpretazione (parlo di quella del Kekulè, riferibile
" alla *ragione di essere* dei corpi organici, che come sapete benis-
" simo è fondata sulle valenze chimiche), questa interpretazione
" dico, non risponde alle esigenze moderne delle altre scienze spe-
" rimentali; perchè si conoscono elementi pure *tetravalenti* ed anche
" abbondanti in natura, i quali non godono la facoltà di formare
" lunghe catene, e perchè ancora la *quantivalenza* degli atomi non
" è una proprietà assoluta, ma bensì una proprietà relativa, la
" quale in uno stesso elemento *può variare* a secondo le condizioni
" in cui questo viene messo. „

VII.

A p. 130 il nominato professore, parlando del *sistema periodico di Mendelejeff*, dice: " Ma ancora numerosi problemi lascia in-
" decisi il nuovo metodo sistematico degli elementi: anzitutto ci
" manca la conoscenza esatta della causa della intima correlazione
" degli elementi espressa dal sistema stesso. „ Ed a p. 131 aggiunge:
" Nessuno può realmente dire se gli elementi previsti dal sistema
" saranno realmente scoperti. Abbiamo così pochi indizii sino ad
" ora, che tutto facciamo dipendere dal caso. „

Io a p. 11 del nominato *mio lavoro* dico: " Secondo me il
" *sistema periodico di Mendelejeff* è una restrizione, ed esso o presto
" o tardi sarà abbandonato o *profondamente modificato*: una vera
" classificazione deve basare su tutte le proprietà degli elementi.
" In questo sono perfettamente di accordo col professore Piccini—
" (V. traduzione del Richter fatta da questo professore, Appendice
" a p. 406). „

VIII.

A proposito delle basi su cui è poggiata la legge di Rault e per conseguenza dei lavori di van 't Hoff, Arrhenius, Ostwald, Planck, de Vries, l'autore a p. 132 si esprime così: " ....In questo modo

“ vediamo la chimica fisica in potente sviluppo. Per essa fioriscono
“ degl' istituti speciali ed un particolare giornale, le cui pagine
“ *sono aperte* tanto allo esperimento quanto alle *considerazioni teo-*
“ *riche*. Tutte le questioni del tempo e di contesa subiscono là
“ una *discussione* profonda. „

Ciò mostra che il professore Meyer approva ed incoraggia la pubblicazione dei lavori teorici ed intuitivi. Ora io nel mio lavoro dico a p. 2: “ Quanto mi pregio di presentare a questa Accade-
“ mia fece oggetto di una mia prelezione, etc....... e siccome in
“ questo emetto concetti nuovi, così bramo che siano pubblicati
“ nei nostri Atti, acciocchè possano ottenere una maggiore divul-
“ gazione nel mondo scientifico e sottoporsi alla *discussione* dei
“ dotti. „ E nell' altro mio opuscolo sul *Carbonio,* alle p. 5 e 6 dico: “ Non sono di quelli che amano far pompa di teorie, ma
“ d' altra parte *non giudico ben fatto* lo eccedere nel senso opposto.
“ Il professore Cannizzaro che vanta in Piria cotesta riserbatezza
“ si duole dell' eccesso opposto, in cui frequentemente cadeva que-
“ sto sommo scienziato. „ E concludo dicendo: “ Moderiamo adun-
“ que la tendenza alle intuizioni astratte, ma non tarpiamo le ali
“ allo ingegno: questa misura potrà riuscire benefica se moderata,
“ potrà diventare esiziale se esagerata. E sopratutto non attendia-
“ mo che certe idee ci vengano da oltremonti e da oltremari per
“ accoglierle con plauso generale. „

A questo proposito mi sia permesso osservare, che, se al professore Paternò, su questo terreno, si fosse lasciata libera azione, a quest' ora il vanto della scoperta della *chimica nello spazio* andrebbe ad onore di un chimico italiano piuttosto che a quello, degnissimo, di un chimico olandese; e la scienza non avrebbe sofferto il ritardo di 18 anni, cioè, dal 1869, epoca in cui il professore Paternò annunziò la prima idea, al 1887 epoca in cui fu diffinitivamente adottata questa teoria. (E già io avevo presentito, nel mio opuscolo sul Carbonio, il bisogno in scienza di una nuova teoria— (V. p. 16 di questo lavoro.)

IX.

Nella stessa pagina 132 l' autore dice: " E pure le grandi
" speranze che ci avevano fatto concepire le investigazioni delle
" questioni *termo-chimiche* non sono state adempiute fin' ora che
" solamente in parte; e però anche qui dei *mezzi di misura più*
" *adatti*, e che attendiamo in avvenire, fanno sperare la desiderata
" chiarezza. „

Io nel *mio lavoro* sul nuovo indirizzo etc. a p. 26 dico:".....Que-
" sto ignoto non si scoprirà che facendo maggiore attenzione
" ai *movimenti* delle ultime particelle della materia, tenendo in mag-
" gior conto, e *nel suo vero senso, che non credo sia l' attuale*, lo
" studio della termo-chimica. „

Come vedete, l' autore dice: le grandi speranze che ci avevano fatto concepire gli studii termo-chimici non sono state adempiute che in parte; io dico: questo ignoto non si scoprirà che facendo *maggiore attenzione* ai movimenti delle ultime particelle della materia (agli studii termo-chimici). L' autore domanda in termo-chimica dei mezzi di misura più adatti; io dico che lo studio della termo-chimica va tenuto in maggior conto, ma nel suo vero senso, che non credo sia l' attuale.

X.

L'autore a p. 132 critica coloro che studiano o dal lato *esclusivamente* chimico o dal lato *esclusivamente* fisico la nostra scienza. Egli si esprime così: " I cultori della chimica generale invece di
" considerare tutto sempre dal punto di vista esclusivamente chi-
" mico, che sappino promuovere applicazioni fisiche ben pensate.
" Però quei tali che cercano di fare progredire la scienza appli-
" cando metodi fisici senza tener conto delle relazioni chimiche
" non sono stati salvati da *errori fatali*. „

Io pure insisto sul danno che ne viene alla scienza se si stu-

dia soltanto da un solo punto di vista e senza l' aiuto delle altre scienze. Infatti a p. 30 del mio lavoro dico: " Credo di avere ab-
" bastanza dimostrato che mancandosi delle conoscenze delle altre
" scienze si cade nell' inconveniente di guardare da *un solo profilo*
" la propria; la qual cosa, spingendola in uno *indirizzo falso*, le
" è causa di regresso. „ Ed a p. 29 dico a guisa di esempio: " Co-
" lui che scoprì la elettricità dinamica fu un professore di anato-
" mia piuttosto che un professore di fisica: anzi da un fisico,
" questa scoperta, venne osteggiata, da Volta (V. la nota), il quale
" fisico *anzitutto*, non considerando *che le condizioni fisiche* del fe-
" nomeno, rigettò la teoria della elettricità animale. „

Parlando poi in termini generali dico a p. 3: " È mia opi-
" nione che per conseguire un vero progresso in una scienza oc-
" corrono le conoscenze di tutte le altre.... Un passo fatto da una
" di esse senza il concorso delle altre è un passo falso, è un de-
" viare piuttosto che un progredire. „ Ed a p. 28 faccio risaltare anche io il concetto del danno che ne verrebbe alle scienze se si abusasse nelle reciproche loro applicazioni; qui infatti dico: " Non
" è bene fraintendere il significato della parola; altro è *specializ-*
" *zarsi* in una scienza altro è *isolarsi*, rendersi cioè sprovvisti delle
" conoscenze a questa necessarie. In quest' ultimo caso si cadrebbe
" in una autonomia *pericolosa*, imperocchè l' autonomia tanto nelle
" scienze politico-sociali, quanto nelle scienze di fatto è indizio
" di regresso. Ora in questo *difetto* in questa specie d' isolamento
" aristocratico è *caduta* la chimica. „

XI.

In seguito a quanto ha precedentemente detto, l' autore nella medesima p. 132, criticando quei chimici, che hanno la tendenza ad estimare di troppo la portata delle proprie scoperte, dice: "... Co-
" me per lo inverso sarebbe da deplorare se l' interesse dei chimici
" per la chimica fisica diventasse minore, imperocchè alcuni rap-
" presentanti della medesima hanno la tendenza ad *estimare di troppo*

" la portata delle loro scoperte. *Colui che nuota in mezzo alle onde,*
" *qualche volta non può guardare sulle cime di esse.* „

Io a questo proposito, parlando dell' abbandono in cui fu tenuta la teoria di Dumas e della lotta che questi dovette sostenere con Berzelius ed i suoi seguaci, quasi tutti i chimici di allora, meno i giovani Gerhardt e Laurent, dico in una nota a p. 5 del mio lavoro: " Ciò non deve fare meraviglia, poichè in simili innovazioni " questo può accadere anche ad uomini eminentemente dotti. „ (È proprio il caso di dire come dice il Meyer: che cotesti rappresentanti della nostra scienza allora parlavano così, perchè *stimavano di troppo* la portata delle loro scoperte. Ed infatti tutti conosciamo che Berzelius combatteva la teoria delle sostituzioni perchè questa avrebbe demolita la sua teoria elettro-chimica, sulla quale questo sommo scienziato aveva fede illimitata).

Nella medesima p. 5 soggiungo poi: " Il principio di Carnot " che diede le basi ad una importantissima scienza, la *termo-dinamica*, a causa appunto di non essere stato capito dai naturalisti " di allora rimase in non cale per molti anni, e ci vollero e Me- " yer (Roberto) e Joule per farlo redivivere. „ E quì si può dire pure con l'autore: a causa di trovarsi gli scienziati di allora, *tanto ingolfati nelle onde da non vedere sulle cime di esse.*

XII.

Il professore Meyer dice sempre a p. 132: " Dopo i sorpren- " denti successi sintetici, un quesito chimico mostrasi malaugura- " tamente più inaccessibile alla sintesi (egli intende parlare della " sintesi dell' albumina). Ma dietro i lavori di . . . . . . possiamo " *guardare in faccia* pieni di speranza, al grande problema della " *delucidazione*, per la sintesi dei corpi albuminoidi. Questi successi " però non sono atti a farci inorgoglire; essi ci fan piuttosto co- " noscere gli *stretti limiti* in cui è confinata la sintesi chimica! „

Con questo l'autore vuol significare:

1. La grande importanza ch' egli attribuisce alla sintesi dei corpi albuminoidi;

2. Il convincimento che ha della ristrettezza delle nostre conoscenze sulla struttura chimica dell' albumina;

3. La persuasione che ha, che i nostri metodi di sintesi in genere si aggirano in limiti molto ristretti.

Ed io analogamente dico nel mio lavoro:

1. A p. 5: " I corpi albuminoidi, che sono il solo e il vero " sostegno di tutti i fenomeni vitali, non appartengono essi al domi- " nio della chimica? nel sintetizzare adunque questi corpi consiste " l'avvenire della chimica organica. „ Ed a p. 13 soggiungo: " Ho " detto che l' avvenire della chimica organica dipende in gran parte " dalla sintesi delle sostanze albuminoidi, non solo perchè esse sono " i termini di passaggio tra i corpi organici e i corpi organizzati, " ma ancora perchè è sommamente necessario scoprire le *cause* " fondamentali, le *leggi* che governano queste formazioni; „

2. Dico a p. 25: " Noi non abbiamo prodotto la sintesi di " nessuna delle sostanze glucosiche e zuccherine, etc. etc. e del- " l' albumina in specie non ne sappiamo più di quanto ne dissero " Gerhardt e Liebig. „ (A questo punto erano le nostre conoscenze quando io pubblicai il mio lavoro, imperocchè allora non si possedevano i lavori di P. Schützenberger. Per altro, l' autore col dire che i nostri studii sulla sintesi dell' albumina sono appena tali da permetterci di guardare in faccia il problema della *delucidazione* per la sintesi dei corpi albuminoidi, e non quello della sintesi stessa, a me sembra che egli esprima il medesimo mio concetto, cioè che su questi corpi le nostre conoscenze sono assai limitate.)

3. A p. 24 onde far rilevare gli *stretti limiti* dei nostri metodi di sintesi in genere, dico: " Faccio dipendere l' avvenire della " chimica organica dalla *ricerca dei metodi* di sintesi; perchè attri- " buisco grande importanza alla sintesi delle sostanze organiche " *naturali* e punto o poco a quella delle *artificiali*, dei quali se ne " possono produrre innumerevoli, senza conseguire altro scopo che " l'affermazione delle attuali teorie; il che, secondo me, non è un " progresso. „

Queste medesime idee io le esprimo pure nel mio opuscolo sul

Carbonio (V. p. 15). Qui infatti dico così: " L'ho già detto a pa-
" gina 10, bisogna raggiungere la *sintesi* dei corpi organici che
" hanno stretta relazione coi corpi organizzati. La chimica orga-
" nica ha bensì studiato la costituzione chimica di *alcuni* corpi or-
" ganici naturali, sintetizzatone altri pochi pure naturali e *moltis-*
" *simi* artificiali, e col far ciò ha riaffermato i principi teorici ri-
" velatici dalla falange degl' illustri chimici dietro nominati; ma in
" generale, a me sembra, che ha progredito lentamente *nel campo*
" *delle teorie*. "

XIII.

Nello stesso periodo l'autore dice: " Dopo che Emilio Fischer
" e Kiliani hanno portato più luce nelle varie specie di *zuccheri*,
" etc. etc. possiamo guardare in faccia, pieni di speranza il grande
" problema della delucidazione per la *sintesi* dei corpi *albuminoidi*. "

Da questo periodo si rileva chiaro che l' autore, per la sintesi dei corpi albuminoidi, attribuisce molta importanza allo studio degli zuccheri.

Ora io in una nota a p. 26 del mio lavoro dico queste precise parole: " Ho più volte parlato della sintesi del *glucosio*, per-
" chè la credo di capitale importanza per la *sintesi* delle sostanze
" *albuminoidi*. Ed infatti, s'è vero che i principii azotati dei vege-
" tali e degli animali — gli albuminoidi e le sostanze gelatinose —
" sono, come certe reazioni fanno supporre, dei derivati ammo-
" niacali dei *glucosi*, e s' è vero che le materie amilacee sono,
" come lo mostra il loro modo di scindersi, dei glucosi condensati,
" allora bisogna ammettere che i *glucosi*, siano i fattori primi di
" tutte le sostanze organizzate, e quindi il vero primo elemento
" della vita. "

XIV.

Siamo ancora nella p. 132, e l' autore dice: " Sarebbe impos-
" sibile produrre nel laboratorio *dall' acido carbonico* e *dall' acqua*,

" zucchero ed amido *come la natura lo fa* un milione di volte nelle
" parti verdi *delle piante?*

Questo che dice l' autore a proposito dell' amido e dello zucchero, io lo dico, a p. 14 del nominato mio lavoro, a proposito dei corpi albuminoidi; e siccome, come or ora ho detto, faccio dipendere l' avvenire sintetico di questi corpi da quello del glucosio e delle sostanze amilacee, così il seguente periodo si può anche riferire allo zucchero e all' amido. Ecco come mi esprimo: " Il chi-
" mico non è ancora arrivato a produrre questi corpi nel suo la-
" boratorio, ma *la natura li produce tutto dì* e facilissimamente
" nell' organismo *vegetale*, e, cosa degna di nota, partendo da com-
" posti semplicissimi, dall' *acqua*, dall' *ammoniaca* e dall' *anidride*
" *carbonica*. Allorquando il chimico li avrà formati nel suo labora-
" torio, allora egli, consegnando il materiale nelle mani del morfo-
" logo o dell' istologo, in uno ai dati scientifici che gli valgono per
" sintetizzarli, potrà dir loro: Ecco, formate, costruite, organiz-
" zate. „

Come vedete, il Meyer dice: la natura lo fa un milione di volte nelle parti verdi delle piante; io dico: la natura li produce tutto dì e facilissimamente nell'organismo vegetale. Il Meyer dice: sarebbe impossibile produrre nel laboratorio, etc? io dico: quando il chimico li avrà prodotti nel suo laboratorio, allora, etc.

XV.

L' autore prosegue nella medesima pagina: " *Il metodo d' in-*
" *vestigazione della chimica organica,* malgrado lo splendore dei suoi
" successi, si trova ancora oggi davanti ad una *confessione vergo-*
" *gnosa*: solamente una *minima* frazione delle materie esistenti gli
" è del tutto accessibile. „

Io a p. 15 del mio lavoro dico: " Di fronte a questo quadro
" sconfortante è mestieri convenire che le attuali teorie e gli attuali
" *metodi* di sperimentare, specialmente *in chimica organica*, sono
" davvero *insufficienti*. „ (Il Meyer dice: il metodo d' investigazione in chimica organica si trova di fronte ad una *confessione vergognosa*).

Ed a p. 25 aggiungo: " Sin dai primi momenti che mi sono
" messo a lavorare in chimica organica mi sono accorto della *in-*
" *sufficienza* dei *metodi* e delle teorie usati. „ E conchiudo a p. 27:
" Allora giudicai inutile insistere in un tale indirizzo e mi diedi a
" fare cose che avessero un carattere di vera novità. Altri tentativi
" (prosegui a p. 28) avrei desiderato di fare seguendo *nuovi me-*
" *todi* di sperimentazione, ma non l'ho potuto in un laboratorio
" come il nostro, che non appresta quei mezzi che hanno la mag-
" gior parte degli altri laboratori. „

Infine faccio osservare al benevole lettore, che col consigliare a p. 15 di non adoperare in chimica organica le troppo elevate temperature e le poco ordinate azioni fisiche e chimiche; col lamentare a p. 56 che il chimico spesso coll'idea di sintetizzare un corpo si mette nelle condizioni in cui questo si disfà; e col consigliare di fare uso di tutte le forze e contemporaneamente, piuttosto che adoperarle ad una ad una, etc. io anche in queste pagine esprimo il concetto del Meyer, cioè che *i metodi d'investigazione in chimica organica sono insufficienti.*

XVI.

L'autore prosegue a dire, sempre nella p. 132: " Il più im-
" portante progresso per la chimica organica non sta nelle singole
" scoperte, e molto meno negl' *innumerevoli* successi sintetici degli
" ultimi tempi (*sintesi di corpi organici artificiali*) (1). „

Io nelle pagine 24 e 25 del mio lavoro mi esprimo così: " Fac-
" cio dipendere l'avvenire della chimica organica dalla ricerca dei
" metodi di sintesi, perchè attribuisco grande importanza alla sin-
" tesi delle sostanze organiche naturali, e *punto* o poco alla pro-
" duzione di quelle *artificiali* delle quali se ne possono ottenere *in-*
" *numerevoli senza conseguire* altro scopo che l'affermazione delle

(1) Faccio osservare che qui l'autore intende parlare delle sintesi dei corpi organici artificiali, pronunziandosi già, in altre parti del suo discorso per la grande importanza delle sintesi dei corpi organici naturali.

“ vecchie teorie, il che secondo me non è un progresso. Imperoc-
“ chè qui non è questione di produrre una sintesi qualunque, ma
“ di scoprire quelle leggi, quei *metodi,* quegli artifizii, quell' ignoto
“ insomma che adopera la natura per produrre tali corpi. „

XVII.

“ Quel che ci mancano, prosegue a dire l' autore in seguito
“ a quanto ha detto precedentemente, sono *nuovi metodi* per il ri-
“ conoscimento della individualità delle sostanze. Le materie nere
“ della terra, gl' innumerevoli prodotti informi e resinosi del corpo
“ delle piante e degli animali, lo splendore affascinante delle ma-
“ terie coloranti dei fiori, di cui la natura chimica ancora oggi si
“ *deride* delle nostre conoscenze, forniranno un nuovo campo ine-
“ sauribile al lavoro del chimico, quando un giorno saranno tro-
“ vati i *metodi* per cominciare il loro studio. „

Io a p. 19 del mio lavoro dico: “ Il chimico piuttosto che te-
“ nersi in questa via poco razionale dovrebbe darsi alla ricerca *dei*
“ *metodi* che mette in opera la natura e procurare d' imitarla. Im-
“ perocchè, aggiungo a p. 20, come noi non conosciamo tutti i
“ modi di manifestazione della forza così (e conseguentemente) non
“ conosciamo tutti i modi di manifestazione della materia. Questo
“ è l' avviamento in cui, a mio modo di vedere, si dovrebbe met-
“ tere una *nuova scuola* di chimica: Ricerca di altre forze, di
“ altre leggi e di *metodi nuovi* di sperimentare. „ (L' autore dice:
quel che ci mancano sono *nuovi metodi*).

Dico poi a p. 25: “ . . . . Dopo la prima sintesi (dell' urea)
“ si sono prodotti è vero moltissimi corpi organici naturali; ma la
“ più gran parte, i più importanti, e spesso di non troppo compli-
“ cata struttura, *sono ancora là* a resistere agli sforzi faticosi del
“ chimico. Noi non abbiamo prodotto la sintesi di nessuno delle
“ sostanze glucosiche e zuccherine, feculenti o amilacee, albuminoidi

“ o fibrinogeni, etc. (1). „ (Meyer dice: Le materie nere della terra, gl' innumerevoli corpi resinosi, le materie coloranti dei fiori, si *deridono* ancora oggi delle nostre conoscenze). „

XVIII.

Dice il professore Meyer nella stessa pagina 132: “ Sia nella
“ *chimica organica* che nella *chimica minerale* noi urtiamo *passo a*
“ *passo* su questioni alla cui soluzione mancano attualmente ancora
“ i mezzi. „

Io a p. 18 del mio lavoro dico: “ Secondo me l' *attuale chi-*
“ *mica* è guidata nelle sue investigazioni da un principio mal for-
“ mulato e solo in parte esatto (spiego poi questo periodo). Con-
“ seguenza di questo fatto è che il chimico si trova, inconsapevol-
“ mente, in uno avviamento opposto al vero indirizzo della scienza.
“ Ecco perchè si assiste tuttodì allo spettacolo di vedere il chi-
“ mico vagare da *incertezza in incertezza* e spesso a fallire nei suoi
“ tentativi o solo indovinare in cose analoghe o identiche alle già
“ fatte. „

Ora io domando: perchè il chimico vaga da incertezza in incertezza e spesso fallisce nei suoi tentativi? Appunto perchè gli mancano i mezzi a risolvere le quistioni contro cui urta passo a passo.

XIX.

L' autore prosegue poi a p. 133: “ E così anche nella chi-
“ mica minerale non solamente debbansi trovare nuovi fatti, ma an-

(1) Qui proseguo a dire: « e non conosciamo nemmeno lontanamente la cagione del po- « tere rotatorio dei corpi, quella del carbonio *asimmetrico* non essendo ancora dimostrata per « tutti i casi, e non reggendo affatto per le sostanze minerali. » — Questo che io scrissi allora, lo scrissi prima dell'ultima edizione della chimica nello spazio di van 't Hoff (*Dix années dans l'histoire d'une theorie)*, e quantunque in seguito si sono sintetizzati corpi dotati di potere rotatorio, pure il mio concetto regge ancora oggi. Di questo parere sono anche coloro che, come me, apprezzano l' ipotesi vantoffiana.

“ cora *nuovi metodi* d' indagine, se si vuole che da questo ramo
“ della nostra scienza irrompa una era di *nuove scoperte*. „

Io, dopo di avere ripetuto in parecchi punti del citato mio lavoro, che abbisognano in scienza nuovi metodi d'investigazione, dico alle pagine 28 e 29 queste precise parole: “ In questo difetto è
“ caduta la chimica., Le altre scienze hanno saputo usufruire degli
“ avanzamenti fatti dalle proprie consorelle e perciò hanno progre-
“ dito. Ma la *chimica in genere* e la *chimica organica* in specie, non
“ fanno che ripetere cose analoghe alle già fatte. „ Il che a me sembra esprima il medesimo concetto dell' autore, cioè che le due chimiche hanno bisogno, per fare cose nuove, di *metodi nuovi*.

XX.

L' illustre autore conclude a p. 134 con queste parole: “ Di
“ questo noi dobbiamo restare persuasi, che la natura non sarà da
“ noi capita prima di avere il mezzo di spiegare le sue manifesta-
“ zioni mercè *movimenti* semplici seguibili *matematicamente*. Verrà il
“ tempo in cui la chimica subirà questo grande cambiamento ......
“ E allora di nuovo riunita alla seria sua sorella, la *fisica*, dalla
“ quale ai nostri giorni si era allontanata, la chimica seguirà con
“ passo sicuro il suo sentiero. „

A questo capitolo non ho da rispondere che quello che dico a p. 26 del nominato mio lavoro, e che ho riportato al capitolo III, p. 11-12 del presente ragguaglio (ve lo ripeto). Dico adunque qui: Io pure, a p. 26 del nominato mio lavoro, faccio rilevare il bisogno del trattamento matematico della nostra scienza, e mi esprimo così:
“ Questo ignoto (ignoto che spiego prima) non si scoprirà se non
“ si fa maggiore attenzione ai *movimenti* delle ultime particelle della
“ materia, se non si tiene insomma in maggior conto lo studio
“ della *termo-chimica*. Non è bene dimenticare che i fenomeni chi-
“ mici, essendo essi effetti di movimento, devono per forza sottosta-
“ re alle leggi generali della *meccanica*. „

Ed a p. 16 del mio opuscolo sul *Carbonio* esprimo pure la speranza, che verrà il tempo in cui la chimica subirà il suo grande cambiamento , e dico così: " Io però non dispero per l' avve-
" nire di questa interessante branca di scienza, e questa speranza
" la fondo nei giovani chimici e nella gioventù nascente; essi, ne
" ho fiducia , sapranno colmare la lacuna che noi forse lasce-
" remo. „

XXI.

Infine a giustificare la espressione di cui parlo a p. 27 ed a p. 29 del citato mio lavoro, e che forse potrebbe sembrare asprissima , cioè " che la chimica in genere e la chimica organica in
" specie si trovano, in quanto a teoria pura e semplice, in *ristagno*
" di 29 anni, „ io domando se il Meyer coll' asserire che la *nuova chimica* non può considerarsi una vera scienza nel suo più alto significato della parola: coll' affermare che il chimico per la sua scienza ha fatto *quasi niente* in confronto di quanto ha fatto per essa la scoperta di Newton; col dichiarare la chimica di oggi essere quello che era l' astronomia ai tempi di *Keplero* e di *Copernico;* col dire che la *termo-chimica* non ha dato i frutti che aveva fatto sperare, e che questo ramo di scienza ha bisogno di metodi d' investigazione *più adatti*; col parlare di *errori fatali* commessi dal chimico a causa di avere studiato la sua scienza dal punto di vista *esclusivamente* chimico o *esclusivamente* fisico; col dire che il chimico intorno ai metodi d' investigazione in chimica organica, si trova di fronte ad una confessione *vergognosa;* coll' asserire che la natura chimica di moltissime sostanze organiche si *deride* delle nostre conoscenze; col ricordare ripetute volte che ci mancano *nuovi metodi* d' investigazione; ed infine col dire che i nostri studii sull' albumina sono appena tali da permetterci di guardare in faccia il problema della *delucidazione* per la sintesi di essa e non quello della sintesi medesima; io domando se col dire tutto ciò il professore Meyer non voglia significare che la nostra scienza si trovi in ristagno,

sempre sotto il punto di vista teorico, per ben altro che di 29 anni!
" Vi fu un momento, esclama l' insigne autore, quando, dietro
" le scoperte di Helmoltz, Roberto Meyer, Joule, Clausius, van 't Hoff,
" i progressi della investigazione si limitavano solo alla fisica, e si
" facevano non poche applicazioni modeste alle discipline affini —
" vi fu un momento in cui si credette venuta l' epoca nella quale
" i processi chimici si potessero seguire in modo analago a quelli
" del suono, della luce e del calore. „ E più in là soggiunge: " E
" pure le grandi speranze che ci avevano fatto concepire le inve-
" stigazioni delle questioni *termo-chimiche*, non sono state adempiute
" sin' ora che solamente in parte. „

E qui finisco il mio ragguaglio, nel quale credo di avere dimostrato la perfetta coincidenza tra le mie idee e quelle del professore Meyer. Non so se sono stato abbastanza felice nello esprimermi, ma mi conforta il pensiero che trattandosi di fatti, la loro natura stessa supplisca alla oscurità del mio linguaggio.

Prima di chiudere mi preme dichiarare che vi sono pure delle disparità tra me ed il professore Meyer, e che queste sono due e di due specie ben differenti l' una dall' altra.

La prima dipende dalla natura stessa del titolo delle nostre pubblicazioni: Il professore Meyer trattando il tema dei problemi chimici dell' epoca presente, rileva gl' inconvenienti che s' incontrano in scienza senza suggerire i rimedii. Io invece trattando il tema di un nuovo indirizzo da dare alla chimica, agli inconvenienti rilevati faccio susseguire i rimedi da contrapporvi (V. tutto il *mio lavoro* e specialmente ciò che dico dalla p. 18 alla p. 24).

L' altra dipende da opinioni personali: Il professore Meyer non crede essere ancora arrivato il momento per il chimico di entrare nel campo biologico e morfologico. Io invece non giudico assolutamente inopportuno il momento, ma credo sia piuttosto questione di saper scegliere la via da tenere; la quale secondo me, non è quella che tiene oggi il chimico, poichè con gli attuali metodi, (io sono di accordo col Meyer), il chimico non riuscirà mai nel suo intento: è

questione quindi di cambiare indirizzo (V. il mio opuscolo sul *carbonio* e lo stesso *mio lavoro* sul nuovo indirizzo). E di questa opinione è pure il professore Ferdinando Cohn, il quale lo disse all' assemblea berlinese degl' *Indagatori della natura*. Per altro il Meyer stesso non è che dice che non spetta al chimico di entrare in questo terreno; anzi il solo ricordarlo mostra precisamente, ch' egli pensi esser questo appunto un campo importante della chimica, in cui presto o tardi la nostra scienza dovrà entrare. In guisa che anche qui mi trovo perfettamente di accordo coll' illustre professore di chimica dell' Università di Heidelberga.

Io sono particolarmente lieto, che queste idee, nuove per la scienza, le quali furono pronunziate un anno addietro in uno dei centri scientifici più importanti della Germania, siano state, emesse due anni prima nella Università di Catania, e pubblicate negli Atti della nostra Accademia.

Catania li 30 Novembre 1890

Sopra un gruppo di Configurazioni regolari
contenute
nell' Esagrammo di Pascal.

Nota del Prof. VITTORIO MARTINETTI.

Partendo da sei punti arbitrarii di una conica si può generare una figura, l' *Esagrammo di Pascal*, la quale, come fu messo in evidenza da molti geometri, è del più grande interesse (*), specialmente per le numerose ed importanti configurazioni, alle quali essa dà luogo.

L' oggetto di questa nota è lo studio delle principali proprietà di una configurazione la quale si può formare coi vertici e con certi punti diagonali, lati e rette di Pascal di un esagono inscritto in una conica.

1. Indichiamo con 1, 2, 3, 4, 5, 6 sei punti distinti presi arbitrariamente sopra una conica.

Questi punti si possono dividere in quindici modi diversi in tre coppie: consideriamone uno, ad es.:

1, 2; 3, 4; 5, 6.

Dei sessanta esagoni semplici di Pascal, i quali si possono formare con quei sei punti, quattro hanno per coppie di vertici opposti le tre coppie considerate, e sono:

1 3 5 2 4 6,

1 3 6 2 4 5,

1 4 5 2 3 6,

1 4 6 2 3 5.

(*) Nella memoria del Sig. *Veronese* « Nuovi teoremi sull'Hexagrammum misticum,» (Mem. della R. Acc. dei Lincei Serie 3ª Vol I. 1877) sono raccolte, insieme a molte nuove, le principali proprietà precedentemente trovate sull'Esagrammo di Pascal, proprietà poi dimostrate in modo elegantissimo anche dal Sig. *Cremona* nella memoria « Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell' Esagrammo di Pascal » (Mem. della R. Acc. dei Lincei Serie 3ª Vol. I. 1877). Ci serviremo in seguito delle denominazioni usate in queste memorie e di alcune delle proprietà ivi dimostrate.

Due qualunque di questi esagoni hanno una coppia sola di lati opposti in comune, ed ogni coppia di lati opposti in uno di essi appartiene sempre ad uno solo degli altri; sicchè le quattro rette di Pascal di quegli esagoni si incontrano due a due in sei punti P (secondo la notazione del Sig. Veronese) i quali sono perciò i vertici del quadrilatero completo formato dalle rette di Pascal considerate.

I vertici opposti di questo quadrilatero indichiamoli con

$$7,\ 8;\quad 9\ 10;\quad 11,\ 12,$$

ponendo:

$$1\,3 \cdot 2\,4 \equiv 11,\quad 1\,5 \cdot 2\,6 \equiv 9,\quad 3\,5 \cdot 4\,6 \equiv 7,$$

$$1\,4 \cdot 2\,3 \equiv 12,\quad 1\,6 \cdot 2\,5 \equiv 10,\quad 3\,6 \cdot 4\,5 \equiv 8.$$

Le rette di Pascal dei detti quattro esagoni sono perciò ordinatamente:

$$(7\ 10\ 11)_1,\quad (8\ 9\ 11)_1,\quad (8\ 10\ 12)_1,\quad (7\ 9\ 12)_1.$$

I *dodici* punti 1, 2, ..., 12 sono situati *tre* a *tre* sopra *sedici* rette (le quattro rette di Pascal e certi dodici lati dell'esagono completo 1 2 3 4 5 6) le quali passano *quattro* a *quattro* per quei dodici punti. Tali punti e rette formano adunque una configurazione $(12_4,\ 16_3)$ (*).

Un cenno sull' esistenza di questa Cf. si trova nella citata memoria del Sig. Veronese (n[i] 5, 6) dove si considerano gli elementi comuni a due delle sei figure π.

Nell'Esagrammo di Pascal sono contenute quindici di tali Cf. (**).

Presane una qualunque le altre si distribuiscono, rispetto ad essa, in due gruppi, uno di *sei* Cf. aventi una coppia di punti fondamentali *coniugati* in comune con quella, l'altro delle *otto* rimanenti non aventi coppie di punti fondamentali coniugati in comune colla data.

(*) Secondo la comoda notazione introdotta dal Sig. *J. de Vries* « Über gewisse ebene Configurationen » (Acta Math. 12: 1. 1888).

(**) Queste quindici Cf. si possono far corrispondere una ad una ai quindici piani di Plücker della figura considerata dal Sig. Cremona (« Teoremi stereometrici ecc.» l. c. n° 18).

Due qualunque dei punti fondamentali 1, 2, 3, 4, 5, 6 sono coniugati in tre diverse Cf., le quali hanno due a due un solo punto P in comune. Reciprocamente un punto P qualunque dell'Esagrammo appartiene a due sole Cf. le quali hanno allora una coppia di punti fondamentali coniugati in comune. Quindi i 45 punti P si distribuiscono in terne di punti, ogni terna essendo individuata da uno de' suoi elementi, e relativa ad una coppia di punti fondamentali. Si vede tosto, che queste terne, in numero di quindici, sono costituite dai punti diagonali dei quadrangoli formati da quattro punti fondamentali, precisamente da quelli distinti dalla coppia di punti coniugati comune alle tre Cf. che danno origine alla terna.

2. Consideriamo una di queste Cf. e manteniamo per essa la notazione sopra stabilita.

Un punto qualunque della Cf. è congiunto con otto altri, quindi estraneo a tre punti della Cf. i quali sono fra loro estranei, come appare dalla seguente tabella in cui sono indicati i sedici allineamenti dei punti della Cf.:

	1 3 11	2 3 12	7 3 5	8 3 6
α)...	1 4 12	2 4 11	7 4 6	8 4 5
	1 5 9	2 5 10	7 9 12	8 9 11
	1 6 10	2 6 9	7 10 11	8 10 12

La Cf. che ci proponiamo di studiare rientra adunque nel gruppo di Cf. (12_4, 16_3) trovato dal Sig. De Vries, soddisfacente alla condizione, che i punti estranei ad un punto siano estranei fra loro, ed è precisamente una Cf. del tipo B (*) come immediatamente si riconosce.

(*) Il Sig. De Vries (l. c.) trova, che due soltanto sono i tipi di Cf. (12_4 16_3) soddisfacenti alla detta condizione, quello che ci proponiamo di studiare, e la Cf. dei dodici punti costituenti tre *quaderne* ed i puuti aventi i medesimi tre tangenziali in linea retta. Lo studio di quest' ultima interessante Cf. (considerata già da *Hesse*, *Cayley*, *Plücker* *Salmon* e specialmente dal Sig. *Cremona* « Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane » Mem. dell' Acc. di Bologna 1ª serie vol. XII Art. 24) forma l'oggetto principale dello scritto del Sig. De Vries; ma però vi si trovano anche accennate alcune delle proprietà della Cf. B, come a suo luogo diremo.

I dodici punti della Cf. si dividono in tre quaderne di punti estranei e queste sono :

1, 2, 7, 8;

3, 4, 9, 10;

5, 6, 11, 12;

ogni quaderna essendo costituita da una coppia di vertici opposti degli esagoni considerati e da una coppia di vertici opposti del quadrilatero formato dalle loro quattro rette di Pascal.

3. Tutte le sostituzioni dei numeri 1, 2, ..., 12 le quali lasciano inalterato il complesso delle terne di numeri della tabella α), indicanti gli allineamenti dei punti della Cf., formano un *gruppo*, il quale si dice *relativo* alla Cf. (*): Se questo gruppo è *transitivo* (**) la Cf. si dice *regolare* (***), perchè essa si comporta egualmente rispetto a tutti i suoi punti.

La nostra Cf. è regolare.

Infatti si vede immediatamente che le due sostituzioni :

$$s_1 = (1\ 11\ 8\ 6\ 2\ 12\ 7\ 5)\ (3\ 9)\ (4\ 10),$$

$$s_2 = (1\ 3\ 5)\ (2\ 4\ 6)\ (7\ 9\ 11)\ (8\ 10\ 12)$$

appartengono al gruppo della nostra Cf., sicchè vi appartengono anche, in particolare, le sostituzioni :

$$s_1^2,\ s_1^3,\ s_1^4,\ s_1^5,\ s_1^6,\ s_1^7,\ s_2 \cdot s_1,\ (s_2 \cdot s_1)^3,\ (s_2 \cdot s_1)^5,$$

le quali, considerate insieme ad s_1 ed s_2, hanno la proprietà di cambiare l'elemento 1 in uno qualunque degli altri undici ; dunque il gruppo della Cf. è transitivo.

Per la simmetria speciale di questa nostra Cf. è facile trovare tutte le sostituzioni del suo gruppo, le quali si ottengono, come è

(*) *Martinetti* « Sulle Cf. piane μ_3 » (Annali di Matematica Serie 2ª tom. XV, n.º 2).

(**) Seguiremo in questo capitolo le usuali denominazioni di *gruppo*, *transitività*, ecc. della teoria delle Sostituzioni. Vedi p. es. *Netto* « Teoria delle sostituzioni » versione italiana del Prof. *Battaglini* (Torino - 1885.)

(***) *A. Schönflies.* « Ueber die regelmässigen Configurationen n3 » (Math. Ann. B XXXI. S. 44)

noto (*), moltiplicando p. es. le undici sostituzioni sopra considerate insieme alla sostituzione identica, per tutte quelle sostituzioni del gruppo, che lasciano inalterato l'elemento 1. Queste ultime formano un sottogruppo di sedici sostituzioni (che si possono scrivere facilmente), il quale, nel nostro caso, è anche il gruppo minimo (**) contenente le tre sostituzioni:

$$\sigma_2 = (3\ 5\ 4\ 6)\ (9\ 12\ 10\ 11)\ (7\ 8),$$

$$\sigma_3 = (3\ 9\ 4\ 10)\ (5\ 12\ 6\ 11),$$

$$\sigma_4 = (3\ 5)\ (4\ 6)\ (9\ 11)\ (10\ 12),$$

cioè:

$$1 = \sigma_4^2,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4,\ \sigma_5 = \sigma_2^2\ (= \sigma_3^2 = ecc.),\ \sigma_6 = \sigma_2^3,\ \sigma_7 = \sigma_3^3,$$

$$\sigma_8 = \sigma_2 \cdot \sigma_3,\ \sigma_9 = \sigma_2^3 \cdot \sigma_3,\ \sigma_{10} = \sigma_4 \cdot \sigma_2,\ \sigma_{11} = \sigma_4 \cdot \sigma_3,\ \sigma_{12} = \sigma_4 \cdot \sigma_5,$$

$$\sigma_{13} = \sigma_4 \cdot \sigma_6,\ \sigma_{14} = \sigma_4 \cdot \sigma_7,\ \sigma_{15} = \sigma_4 \cdot \sigma_8,\ \sigma_{16} = \sigma_4 \cdot \sigma_9.$$

Il gruppo della Cf. è composto di 12. 16 = 192 sostituzioni.

4. Considerando anche soltanto le due sostituzioni s_1, s_2 del gruppo si riconosce, che le quaderne di punti estranei della Cf. si possono scambiare una nell' altra, ossia, che la Cf, si comporta egualmente non solo rispetto ai suoi punti, ma anche rispetto alle tre quaderne, che la compongono (come del resto è naturale, essendo ogni quaderna di punti estranei individuata da un suo elemento, ed essendo transitivo il gruppo della Cf.).

Si vede ancora, dall' esame del gruppo trovato, che in una quaderna i punti si dividono in due coppie di punti *coniugati*, poichè le sostituzioni, che non alterano una quaderna, o lasciano inalterate le coppie o scambiano queste una nell' altra.

Le due coppie di ciascuna quaderna sono formate una da due vertici opposti degli esagoni fondamentali, l' altra da due vertici opposti del quadrilatero delle rette di Pascal.

Il fatto della regolarità della Cf. ci averte intanto, che la Cf.

(*) *Netto*, l. c. Capitolo IV, nº 62.
(**) *Netto*, l. c. Capitolo II, n. 37.

stessa può essere considerata in varie guise come nascente da sei punti di una conica (nel modo esposto al n.° 1), e la considerazione del gruppo trovato condurrebbe senza difficoltà ad assegnare i gruppi di tre coppie di punti, i quali possono considerarsi come fondamentali per la sua generazione:

Ma noi possiamo anche dedurli direttamente.

5. *La Cf. considerata è inscritta in una curva di 3.° ordine* (*).

Infatti, i nove punti della Cf. situati sulle tre rette.

$$(1\ 3\ 11)_1,\quad (2\ 5\ 10)_1,\quad (7\ 9\ 12)_1$$

stanno anche sulle tre rette

$$(1\ 5\ 9)_1,\quad (2\ 3\ 12)_1,\quad (7\ 10\ 11)_1,$$

quindi sono la base di un fascio di cubiche. Per la stessa ragione i punti 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12 situati sulle rette

$$(1\ 3\ 11)_1,\quad (4\ 5\ 8)_1,\quad (7\ 9\ 12)_1,$$

$$(1\ 4\ 12)_1,\quad (3\ 5\ 7)_1,\quad (8\ 9\ 11)_1,$$

sono la base di un altro fascio di cubiche.

Esiste perciò tanto la cubica

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 9\ 10\ 11\ 12)_3$$

quanto la

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 11\ 12)_3.$$

Ma queste due cubiche non sono distinte, perchè dei loro nove punti comuni

1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12

le due terne 1, 3, 11; 7, 9, 12 sono in linea retta, mentre non sono in linea retta i tre punti rimanenti 2, 4, 5. Ciò dimostra l'esistenza della cubica

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)_3,$$

(*) *De Vries* l. c. n.° 4.

la quale alla sua volta deve passare per 6, poichè essa appartiene al fascio individuato dalle due cubiche spezzate:

$$(1\ 5\ \ 9)_1 \cdot (3\ 6\ 8)_1 \cdot (7\ 10\ 11)_1 ,$$

$$(1\ 6\ 10)_1 \cdot (3\ 5\ 7)_1 \cdot (8\ \ 9\ 11)_1 \cdot$$

Le coppie di punti 7, 8; 9, 10; 11, 12 essendo di vertici opposti di un quadrilatero completo inscritto in una cubica, sono coppie di punti *coniugati* (aventi cioè il medesimo tangenziale) in un medesimo sistema (*): e poichè la coppia 11, 12 si proietta sulla cubica dai punti 3 ed 1 rispettivamente nelle coppie 1, 2; 3, 4 e la coppia 9, 10 si proietta da 1 sulla cubica nei punti 5, 6 così (**) anche le coppie 1, 2; 3, 4; 5, 6 sono di punti *coniugati* nello stesso sistema nel quale lo sono 7 ed 8, 9 e 10, 11 e 12.

I sei tangenziali di ciascuna coppia di punti coniugati, che noi indicheremo ordinatamente con

$$\binom{1}{2},\quad \binom{3}{4},\quad \binom{5}{6},\quad \binom{7}{8},\quad \binom{9}{10},\quad \binom{11}{12},$$

sono manifestamente vertici di un quadrilatero completo, e sono opposti, quindi coniugati sulla cubica, i tangenziali di due coppie appartenenti alla medesima quaderna della Cf., perciò i punti di una quaderna della Cf. hanno il medesimo secondo tangenziale, ed i tre secondi tangenziali dei punti delle tre quaderne stanno sopra una medesima retta, la quale risulta la *seconda retta satellite* di ogni retta della Cf. (***), poichè ciascuna di queste contiene un punto di ognuna delle tre quaderne.

6. I quattro punti della cubica 3, 4, 5, 6 hanno per punto *opposto* (****) il punto $\binom{7}{8}$, perchè le due rette $(3\ 5)_1$ $(4\ 6)_1$ passano per 7; Segue adunque che il punto $\binom{7}{8}$ è situato sulla retta $(1,\ 2)_1$, essendo i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6 sopra una conica. In

(*) *Cremona*. Introduzione... l. c. Art. 24.
(**) *Maclaurin* » De linearum geometricarum proprietatibus « trad. di De-Jonquières » Mélanges de géomètrie pure » Paris 1856 pag. 242. Vedi anche *Cremona*, « Introduzione... » l. c. n.° 134.
(***) *De-Vries* l. c. n.° 4.
(****) *Cremona* « Introduzione... » l. c. n. 65.

modo analogo si dimostra, che le rette $(3\ 4)_1$, $(5\ 6)_1$ passano rispettivamente per $\binom{9}{10}$, $\binom{11}{12}$.

Allora, poichè l'ulteriore intersezione della cubica colla congiungente due punti coniugati in un certo sistema ha per coniugato in questo stesso sistema il tangenziale comune ai due punti coniugati (*), così ne viene, che le tre coppie $\binom{1}{2}$, $\binom{7}{8}$; $\binom{3}{4}$, $\binom{9}{10}$ $\binom{5}{6}$, $\binom{11}{12}$ sono di punti coniugati nello stesso sistema nel quale 1 è coniugato a 2.

7. Data una Cf. $(12_4,\ 16_3)$ del nostro tipo, è ad essa relativa una retta, la seconda retta satellite delle rette della Cf.

Prendiamo ad arbitrio una retta segante una data cubica C_3 nei tre punti α, β, γ e vediamo quante di quelle Cf. siano ad essa relative.

Prendiamo due punti $\binom{1}{2}$, $\binom{7}{8}$ della C_3 aventi α per tangenziale (questo si può fare in sei modi diversi), e perciò coniugati sulla cubica in un sistema $[\Sigma]$, da essi individuato.

Prendiamo due altri punti $\binom{3}{4}$, $\binom{9}{10}$ aventi β per tangenziale e coniugati in $[\Sigma]$ (il che si può fare in due modi diversi) e poniamo:

$$\binom{5}{6} \equiv \binom{1}{2}\binom{9}{10} \cdot \binom{3}{4}\binom{7}{8},$$

$$\binom{11}{12} \equiv \binom{1}{2}\binom{3}{4} \cdot \binom{7}{8}\binom{9}{10}.$$

Sono questi punti $\binom{5}{6}$, $\binom{11}{12}$ sulla cubica e coniugati in $[\Sigma]$, ed insieme ai punti $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4}$, $\binom{7}{8}$, $\binom{9}{10}$ costituiscono i vertici di un quadrilatero completo inscritto in C_3. Di tali quadrilateri ne possiamo formare dodici, quattro per ogni sistema di punti coniugati sulla cubica.

Prendiamo ora tre coppie di punti sopra C_3 coniugati in $[\Sigma]$ ed aventi rispettivamente per tangenziali $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4}$, $\binom{5}{6}$ (il che si può fare in $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ modi differenti) e siano 1, 2; 3, 4; 5, 6.

(*) Cremona « Introduzione... » l. c. n. 133.

La retta $(1\ 3)_1$ seghi la cubica in 11, e la $(1\ 4)_1$ in 12; 11 e 12 saranno coniugati in $[\Sigma]$ ed avranno per tangenziale comune $\binom{11}{12}$. Inoltre, perchè la $(3\ 11)_1$ passa per 1, dovrà la $(3\ 12)_1$ passare per 2; e così la $(4\ 11)_1$ passerà per 2, poichè la $(4\ 12)_1$ passa per 1.

Le rette $(1\ 5)_1$ $(1\ 6)_1$ seghino C_3 nei punti 9 e 10: Questi pure saranno coniugati in $[\Sigma]$, avranno $\binom{9}{10}$ per tangenziale e saranno situati ordinatamente sulle rette $(2\ 6)_1$, $(2\ 5)_1$.

Le rette $(9\ 11)_1$ $(10\ 11)_1$ seghino ordinatamente la C_3 ancora nei punti 8 e 7, coniugati in $[\Sigma]$, aventi $\binom{7}{8}$ per tangenziale e situati ancora rispettivamente sulle rette $(10\ 12)_1$, $(9\ 12)_1$.

Le rette $(3\ 7)_1$ $(4\ 7)_1$ segano ulteriormente la cubica negli stessi punti nei quali questa è segata dalle rette $(4\ 8)_1$, $(3\ 8)_1$, e questi punti sono coniugati in $[\Sigma]$ ed hanno $\binom{5}{6}$ per tangenziale. Per la notissima proprietà, che il tangenziale di due punti coniugati è coniugato (nello stesso sistema) all' ulteriore intersezione della cubica colla congiungente i due punti coniugati, noi avremo, che la retta $(11\ 12)_1$ passa per $\binom{5}{6}$, ed allora, perchè nelle tre terne di punti allineati della C_3

$$1\ ,\ 5\ ,\ 9\ ;\ 11\ ,\ 12\ ,\ \binom{5}{6}\ ;\ 3\ ,\ 7\ ,\ x$$

si hanno anche gli allineamenti $(1\ 3\ 11)_1$ $(7\ 9\ 12)_1$, si ricava, che i punti 5, $\binom{5}{6}$, x devono essere in linea retta, però x è il punto 5; Sicchè la $(4\ 7)_1$ passa per 6.

I punti 1, 2, ... 12 ora costruiti appartengono manifestamente ad una Cf. $(12_4,\ 16_3)$ del nostro tipo (basta confrontare gli allineamenti ora trovati con quelli indicati nella tabella α del n° 2) perciò: Le Cf. $(12_4\ 16_3)$ del nostro tipo aventi una data retta come seconda retta satellite delle sue rette (*) sono in numero di $6 \cdot 2 \cdot 8 = 96 \cdot$

(*) Tutte le rette aventi una data retta per seconda satellite sono $16 \cdot 16$, ed i punti della cubica situati sopra queste rette sono in tutto $4 \cdot 12$. Tali punti e rette formano una Cf. $(48_{16},\ 256_3)$ inscritta nella cubica, contenente le 96 Cf $(12_4,\ 16_3)$ della nostra specie e relative alla data retta, inoltre 16 Cf. $(12_4,\ 16_3)$ del tipo A (del Sig. De Vries l. c.) e 12 Cf. $(24_8,\ 64_3)$ formate da sei quaderne di punti aventi per tangenziale comune i sei vertici di un quadrilatero completo inscritto nella cubica e formato da rette aventi la data per (1ª) satellite (Cf. considerate dal Sig. de Vries l. c. n° 4)

Le nostre Cf. sono individuate da tre coppie di punti coniugati sulla cubica (in uno stesso sistema) situati sopra una conica: Ma si deduce facilmente, dal ragionamento fatto sopra, che condizione necessaria e sufficiente perchè tre di tali coppie di punti coniugati siano sopra una conica è che i tre tangenziali delle coppie di punti siano coniugati (nel detto sistema) di tre punti in linea retta.

Questa osservazione mostra, che quattro sono i gruppi di tre coppie di punti coniugati della Cf. situati sopra una conica, cioè:

1 , 2 ; 3 , 4 ; 5 , 6 ,
1 , 2 ; 9 , 10 ; 11 , 12 ,
3 , 4 ; 7 , 8 ; 11 , 12 ,
5 , 6 ; 7 , 8 ; 9 , 10 ,

come ritroveremo anche per altra via.

8. Una retta della Cf. essendo congiunta a nove altre, è estranea a sei rette della Cf. Prese due rette estranee si hanno sempre sei rette contemporaneamente congiunte ad esse, perchè ogni retta contiene un punto di ciascuna quaderna, epperò ogni suo punto (si intende appartenente alla Cf.) è congiunto con due punti di ogni retta ad essa estranea. Vi sono adunque sempre due rette estranee a due rette fra loro estranee.

In due modi diversi si possono distribuire in due gruppi di tre, le sei rette congiunte a due rette fra loro estranee in guisa ch'esse contengano tutti i sei punti delle due rette estranee, e ciascuna terna di queste rette (estranee) sega allora la cubica in tre punti della Cf. allineati sopra una retta della Cf. Perciò da ogni coppia di rette estranee nascono due figure (Δ) (*), ossia due Cf. (9_2, 6_3) i cui punti formano la base di un fascio di cubiche, nelle quali ve ne sono due spezzate in tre rette (queste rette sono quelle della Cf.) (**).

Le fig. (Δ) esistenti nella Cf. data sono $\frac{16 \cdot 6 \cdot 2}{6 \cdot 2} = 16$: Ma come si vedrà queste Cf. (9_2, 6_3) sono speciali, poichè tra i nove

(*) *Martinetti.* « Sopra alcune Cf. piane » (Annali di Mat. Serie II. Tom. XIV, n.° 5).

(**) È facile vedere, che di Cf. (9_2, 6_3) non ve ne possono essere che di due tipi (come accenna anche il Sig. De-Vries, l. c. n.° 3) le fig. (Δ) e le Cf. che hanno per punti i vertici di due triangoli arbitrarii riferiti fra loro e le intersezioni dei lati corrispondenti, e per rette i sei lati dei due triangoli.

punti, che le compongono esiste un settimo allineamento di tre punti, ossia nel fascio di cubiche avente per base i punti di una di queste Cf. esiste ancora una cubica composta di una retta e di una conica.

9. Le sostituzioni s_1, s_2 e loro prodotti (n.° 3) sono sufficienti a mostrare come la coppia di punti 1, 2 possa essere sostituita da un' altra coppia qualunque di punti coniugati della Cf.; talchè gli elementi della Cf. si comportano rispetto ad 1 e 2 come rispetto a qualsivoglia altra coppia di punti coniugati. Esaminando (col sussidio della tabella α del n.° 2), come la Cf. si comporti rispetto ad 1 e 2, si conclude.

1.° Se da due punti coniugati di una quaderna si proiettano sulla cubica i medesimi due punti coniugati di una seconda quaderna, si ottengono i medesimi due punti coniugati della terza quaderna.

2.° Se da due punti coniugati di una quaderna si proiettano sulla cubica gli stessi due punti non coniugati di un' altra quaderna, si hanno due coppie di punti non coniugati e *distinti* della terza quaderna.

3.° Se da un punto di una data quaderna si proietta sulla cubica una coppia di punti della Cf. allineati con un altro punto della stessa quaderna, ma non ad esso coniugato, si ottiene una coppia di punti della Cf. allineati al punto (della quaderna data) coniugato a quest' ultimo.

Consideriamo una retta arbitraria della Cf. e siano a, b, c i tre punti (appartenenti adunque a quaderne diverse) situati sopra di essa, e diciamo a', b', c' i loro coniugati, ed a_1, a'_1; b_1, b'_1; c_1, c'_1 le altre tre coppie di punti coniugati, che insieme a quelle costituiscono le tre quaderne.

Le $(a_1\ b)_1$ $(a_1\ c)_1$ sono rette della Cf., le quali contengono ancora due punti. Sulla $(a_1\ b)_1$ non vi può essere il punto c e neppure c' (per l'osserv. 1ª), perciò diciamo c_1 il punto situato su di essa: e per la medesima ragione diciamo b_1 il terzo punto situato sulla $(a_1 c)_1$ · I punti c_1 e b_1 saranno (per l'osserv. 3ª) allineati con a'.

Le rette $(a'_1\, b)_1$, $(a'_1\, c)_1$ conterranno allora rispettivamente i punti c'_1 e b'_1 pure allineati con a': E si avrà inoltre (per l'osserv. 1ª) che a, b_1, c'_1; a, b'_1, c_1 sono terne di punti allineati.

Per questo vediamo che i nove punti a, b, c, a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1 appartengono ad una fig. (Δ) nella quale oltre ai sei allineamenti: $a_1\, b\, c_1$; $a_1\, b_1\, c$; $a'_1\, b\, c'_1$; $a'_1\, b'_1\, c$; $a\, b_1\, c'_1$; $a\, b'_1\, c_1$ esiste anche l'allineamento a, b, c e solo quello.

Partendo dalla retta $(a\, b\, c)_1$ abbiamo adunque costruita una fig. (Δ) formata da punti e rette della Cf. nella quale esiste un settimo allineamento $(a,\, b,\, c)_1$ di punti fondamentali, e poichè questo allineamento si comporta diversamente dagli altri sei della fig. (Δ) ne viene, che le fig. (Δ) nascenti in questo modo sono le 16 trovate al n. 8.

Considerando ancora la figura precedente riconosciamo che devono aver luogo anche i tre allineamenti dei punti: a, b', c'; a', b, c'; a', b', c, per la qual cosa a, b, c, a', b', c sono vertici di un quadrilatero completo formato da rette della Cf. Di tali quadrilateri se ne hanno quattro, e le quattro fig. (Δ) relative ai lati di uno qualunque di essi posseggono tutte sei punti in comune, i quali sono situati necessariamente sopra una conica.

Dunque i dodici punti della Cf. si possono distribuire in *quattro* modi diversi in due gruppi di sei, quelli di un gruppo essendo sopra una conica, quelli dell'altro vertici di un quadrilatero completo.

La nostra Cf. può dunque essere generata in quattro modi diversi nel modo che si è detto al n. 1.

I gruppi di punti sopra una conica e quelli vertici di un quadrilatero completo sono i seguenti:

Sopra una conica	Vertici di un quadrilatero
1, 2; 3, 4; 5, 6	7, 8; 9, 10; 11, 12
1, 2; 9, 10; 11, 12	3, 4; 5, 6; 7, 8
3, 4; 7, 8; 11, 12	1, 2; 5, 6; 9, 10
5, 6; 7, 8; 9, 10	1, 2; 3, 4; 11, 12

Due qualunque delle coniche hanno due punti coniugati in comune, così pure due qualunque dei quadrilateri hanno in comune una coppia di vertici opposti.

Un quadrilatero ha sempre due coppie di vertici opposti sopra le tre coniche ad esso non relative.

I quattro quadrilateri contengono complessivamente tutte le rette della Cf.

Risulta subito ancora, che le rette della Cf. passanti per due punti coniugati si possono ordinare in modo da formare due gruppi proiettivi.

10. Il Sig. De-Vries (l. c.) trovò che in 12 modi diversi si possono prendere otto punti della Cf. in guisa che essi diano un ottagono di Steiner (cioè i lati suoi passino alternativamente per due punti — *principali* — della cubica) e per essi i punti principali sono le possibili coppie di punti non coniugati di una quaderna (aventi adunque il medisimo secondo tangenziale ma non il primo, come necessariamente devono essere tutti i punti principali degli ottagoni di Steiner (*)).

Le coppie di ottagoni relative a due coppie di punti principali formanti una quaderna contengono come lati tutte le rette della Cf.

Oltre a questi ottagoni di Steiner rilativi a due punti principali, si possono formare con punti e rette della Cf. degli ottagoni di Steiner relativi a quattro punti principali, tali cioè che i lati loro passino ordinatamente per quattro punti della cubica nella quale è inscritta la Cf.

Infatti ordinando i punti di due quaderne qualunque della Cf. prendendo alternativamente un punto dell'una ed un punto dell'altra, i punti della stessa quaderna essendo poi scelti alternativamente nelle due coppie, che la compongono, si formano degli ottagoni semplici, in numero di 24, aventi per vertici opposti punti

(*) Per la teoria dei poligoni di Steiner inscritti in una cubica si può vedere p. es: *H. Schroeter*. « Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung » Leipzig 1880 § 31. Ovvero la nota di *Steiner* nel Giornale di Crelle Vol. 32° pag. 182-184, e le memorie di *K. Küpper* — « Über die Steinerschen Polygone auf einer Kurve 3 Ordn...ecc. » (Math. Ann. B. 24.°) *P. H. Schoute* « Die Steinerschen Polygone » (Giornale di Crelle—Vol. 95° pag. 105 e seg.) ecc.

coniugati, i quali, per le proprietà notate al n. 9, (o direttamente come risulta dalla tabella α)) sono tutti ottagoni di Steiner relativi a due od ai quattro punti della terza quaderna.

Di questi 24 ottagoni di Steiner i 12 seguenti sono relativi a due punti principali :

I. Gruppo.

Ottagoni di Steiner	punti principali
1 3 7 10 2 4 8 9,	11, 5;
1 4 7 9 2 3 8 10,	12, 6;
1 5 7 12 2 6 8 11,	9, 3;
1 6 7 11 2 5 8 12,	10, 4;
1 9 7 3 2 10 8 4,	5, 12;
1 10 7 4 2 9 8 3,	6, 11;
1 11 7 5 2 12 8 6,	3, 10;
1 12 7 6 2 11 8 5,	4, 9;
3 5 9 12 4 6 10 11,	7, 1;
3 6 9 11 4 5 10 12,	8, 2;
3 11 9 5 4 12 10 6,	1, 8;
3 12 9 6 4 11 10 5,	2, 7,

ed i 12 seguenti sono invece relativi a quattro punti principali:

II. Gruppo.

Ottagoni di Steiner	punti principali.
1 3 7 9 2 4 8 10,	11, 5, 12, 6;
1 4 7 10 2 3 8 9,	12, 6, 11, 5;
1 5 7 11 2 6 8 12,	9, 3, 10, 4;
1 6 7 12 2 5 8 11,	10, 4, 9, 3;
1 9 7 4 2 10 8 3,	5, 12, 6, 11;
1 10 7 3 2 9 8 4,	6, 11, 5, 12;
1 11 7 6 2 12 8 5,	3, 10, 4, 9;
1 12 7 5 2 11 8 6,	4, 9, 3, 10;
3 5 9 11 4 6 10 12,	7, 1, 8, 2;
3 6 9 12 4 5 10 11,	8, 2, 7, 1;
3 11 9 6 4 12 10 5,	1. 8, 2, 7;
3 12 9 5 4 11 10 6,	2, 7, 1, 8.

Scambiando in uno qualunque degli ottagoni di un gruppo due soli vertici opposti si ottiene un ottagono dell'altro gruppo.

Anche per gli ottagoni del II gruppo ha luogo la proprietà, che si possono accoppiare due a due in guisa che essi contengano le rette della Cf. Ma si ha inoltre per questi ottagoni la proprietà, che le rette di uno qualunque di essi, i vertici e relativi punti principali costituiscono una Cf. (12_2 8_3) (non regolare). Perciò la nostra Cf. (12_4, 16_3) si può in *sei* modi considerare come l'insieme di due certe Cf. (12_2, 8_3) aventi gli stessi punti ma rette distinte.

Le 12 Cf. (12_2, 8_3) nascenti dai 12 ottagoni del II gruppo sono tutte distinte.

I punti di due quaderne si possono però ordinare ancora in varii modi, così da formare ottagoni semplici, aventi per lati rette della Cf., basta prendere alternativamente un punto in ciascuna quaderna, senza prendere alternativamente nelle coppie i punti delle singole quaderne; Ma è facile vedere come non nascano così dei poligoni di Steiner propriamente detti.

11. I 24 ottagoni sopra considerati non sono i soli poligoni di Steiner, che si possono formare con punti e rette della Cf.

Ogni quadrangolo semplice avente per vertici opposti due coppie di punti coniugati non appartenenti alla stessa quaderna, è un quadrangolo di Steiner relativo a due punti coniugati dell' altra quaderna.

Esagoni, e decagoni di Steiner relativi a due punti principali, non ve ne possono essere nella Cf., perchè tali punti principali devono soddisfare a condizioni diverse da quelle di possedere il medesimo primo o secondo tangenziale (*), le sole condizioni cui possono soddisfare due punti presi comunque nella nostra Cf. (è evidente che i punti principali dei poligoni, in parola dovrebbero appartenere alla Cf.).

Ma però ogni esagono semplice avente per vertici opposti tre coppie di punti coniugati sopra una conica (e sono 16 in tutto) è un poligono di Steiner relativo a tre punti principali (situati sulla retta di Pascal di quell' esagono), nè questi soli sono gli esagoni di

(*) *K. Küpper*—l. c.

Steiner relativi a tre punti principali, perocchè uno di questi esagoni semplici, insieme ai tre punti principali ed ai suoi lati costituisce sempre una fig. (Δ), e reciprocamente presa una fig. (Δ) quale si voglia, e tre punti di essa non situati due a due sopra rette della figura, gli altri sei punti possono essere presi in modo da formare un esagono di Steiner relativo a quella terna. Ogni fig. (Δ) della Cf. dà adunque sei esagoni di Steiner, de' quali uno solo è anche di Pascal. Gli esagoni di Steiner relativi a tre punti principali sono adunque 6. 16=96, poichè da fig. (Δ) diverse, ed anche dalla stessa figura, nascono sempre esagoni diversi.

Oltre a questi non vi sono nella Cf. altri poligoni di Steiner.

12. Le rette estranee ad una qualunque delle rette della Cf. sono sei e contengono insieme nove punti della Cf., i quali, con quelle rette, costituiscono una Cf. $(9_2, 6_3)$ diversa da una fig. (Δ), quindi una Cf. $(9_2, 6_3)$ della sola specie possibile altre alle fig. (Δ) (*)

In queste Cf. $(9_2\ 6_3)$ non esiste alcuna terna di rette estranee fra loro, per la qual cosa non si possono distribuire le rette della data Cf. in quaderne contenenti tutti i 12 punti (**) cioè non esistono quadrilateri principali.

Si è già notato invece come i punti della Cf. si possano in tre modi diversi distribuire in quaderne di punti (estranei) pei quali passano complessivamente tutte le 16 rette della figura, cioè esistono tre quadrangoli principali.

Avendosi però nella Cf. delle fig. (Δ), vi sono necessariamente dei trilateri principali (terne di rette estranee contenenti nove punti della Cf.) — Ogni fig. (Δ) dà luogo a due diversi trilateri principali, però questi sono 32, riconoscendosi facilmente, che ogni trilatero principale deve appartenere ad un' unica fig. (Δ).

13. Se in una Cf. della nostra specie si congiungono fra loro i punti estranei, si ottengono rette non appartenenti alla Cf. le quali si distribuiscono in due gruppi secondo che esse congiungono o no due punti coniugati.

(*) Vedi nota al n. 8.
(**) De-Vries, l. c.

Come si è già veduto (n.[i] 6 e 9) le rette congiungenti due punti coniugati, in numero di sei, segano la cubica ulteriormente in punti distinti i quali sono i tangenziali dei punti della Cf.

Le altre rette, in numero di 12, congiungenti punti estranei si distribuiscono a coppie; una delle rette contiene due punti non coniugati, quella formante con essa una coppia contiene i punti coniugati a quelli, per la qual cosa le due rette di una coppia si segano sulla cubica, nella quale è inscritta la Cf.

Dunque le ulteriori intersezioni della cubica colle rette congiungenti i punti estranei della Cf. sono complessivamente dodici punti.

Chiamiamo ordinatamente:

$$7', 8', 9', 10', 11', 12',$$

i tangenziali dei punti

$$1, 7, 3, 9, 5, 11$$

(quindi anche tangenziali dei punti 2, 8, 4, 10, 6, 12 ed intersezioni della cubica ordinatamente colle rette $(7\ 8)_1$, $(1\ 2)_1$, $(9\ 10)_1$ $(3\ 4)_1$, $(11\ 12)_1$, $(5\ 6)_1$) e poniamo:

$$(1\ 7)_1 \cdot (2\ 8)_1 \equiv 1',$$

$$(1\ 8)_1 \cdot (2\ 7)_1 \equiv 2',$$

$$(3\ 9)_1 \cdot (4\ 10)_1 \equiv 3',$$

$$(3\ 10)_1 \cdot (4\ 9)_1 \equiv 4'.$$

$$(5\ 11)_1 \cdot (6\ 12)_1 \equiv 5',$$

$$(5\ 12)_1 \cdot (6\ 11)_1 \equiv 6'.$$

Segue subito che le coppie $1'$, $2'$; $3'$, $4'$; $5'$, $6'$; $7'$, $8'$; $9'$, $10'$; $11'$, $12'$ sono di punti coniugati sulla cubica nel medesimo sistema [Σ] nel quale 1 è coniugato a 2.

Oltre agli allineamenti delle terne di punti $7'\ 9'\ 12'$, $7'\ 10'\ 11'$, $8'\ 9'\ 11'$, $8'\ 10'\ 12'$, che sappiamo (n° 5) debbono aver luogo fra i punti $7'$, $8'$, $9'$, $10'$, $11'$, $12'$, se ne hanno altri ancora.

Infatti considerando le due terne 1, 3, 11; 7, 9, 12 di punti in linea retta, ed unendo 1 con 7, 3 con 9, ed 11 con 12 otteniamo tre rette, le quali segano ulteriormente la cubica in tre punti in linea retta; questi punti sono 1', 3', 11'.

Allo stesso modo considerando le coppie di terne di punti allineati:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 7 & 10 & 12 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 7 & 3 & 5 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 7 & 4 & 6 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 8 & 9 & 11 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 8 & 10 & 12 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 8 & 3 & 6 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 8 & 4 & 5 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 9 & 5 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 10 & 6 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 2 & 9 & 6 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 2 & 10 & 5 \end{Bmatrix},$$

si dimostrano ordinatamente gli allineamenti delle terne di punti:

1' 4' 12', 1' 9' 5', 1' 10' 6', 2' 3' 12', 2' 4 11', 2' 9' 6', 2' 10' 5',
7' 3' 5', 7' 4' 6', 8' 3' 6', 8' 4' 5'.

Confrontando i sedici allineamenti trovati fra i punti 1', 2', ... 12' con quelli indicati nella tabella α del n° 2 si conclude senz'altro:

" Le ulteriori intersezioni delle congiungenti i punti estranei di una Cf. (12_4 16_3), del nostro tipo, colla cubica, nella quale la Cf. è inscritta, sono in tutto dodici punti appartenenti ad un'altra Cf. (12_4 16_3) del medesimo tipo. „

Si osservi che dalle *sei* rette che congiungono i punti di una quaderna della data Cf. nascono *quattro* punti formanti una quaderna della seconda, e che le due Cf. non hanno elementi comuni.

Si noti ancora come data la prima Cf. la seconda si possa costruire (linearmente) in modo semplicissimo.

14. " Ciascuna delle nostre Cf. (12_4 16_3) può essere dedotta, nel modo detto sopra, da 16 altre Cf. della stessa specie. „

Infatti: Consideriamo una delle nostre Cf. ed i suoi punti e rette siano indicati come si è detto al n° 1. Assumiamo uno dei quadrilateri formati da rette e punti della Cf. (ciò potrà farsi in quattro modi diversi) ad es. quello di vertici opposti:

7, 8; 9, 10; 11, 12

Consideriamo due punti della cubica C_3, nella quale è inscritta la Cf., aventi per tangenziale 7 e coniugati nel sistema [Σ] nel quale 1 è coniugato a 2, e siano 1', 2' (ciò potrà farsi in due modi diversi.) Come è noto la retta $(1'\ 2')_1$ passa per 8.

Diciamo 7', 8' le ulteriori intersezioni di C_3 colle rette $(1\ 1')_1$, $(1\ 2')_1$; questi punti sono coniugati in [Σ] ed hanno per tangenziale il punto 8, perchè 1 ha per tangenziale l'ulteriore intersezione di C_3 colla $(7\ 8)_1$ (n° 6); la $(7'\ 8')_1$ passerà per 7.

Le rette $(1'\ 8')_1$, $(2'\ 7')_1$ debbono segarsi in 2, sicchè se in luogo di 1 si fosse considerato il punto 2 si sarebbero attenuti colla precedente costruzione i medesimi punti 7', 8'.

Consideriamo due punti 3', 4' coniugati in [Σ] ed aventi 9 per tangenziale (due sono le scelte possibili) e proiettiamo questi punti sulla C_3 dal punto 3 (ovvero 4) ed avremo due punti 9', 10' (ovvero 10', 9') i quali sono coniugati in [Σ], hanno 10 per tangenziale e sono allineati con 9.

I punti 5', 6', 11', 12' ulteriori intersezioni della C_3 ordinatamente colle rette

$$(1'\ 9')_1\ ,\ (1'\ 10')_1\ ,\ (1'\ 3')_1\ ,\ (1'\ 4')_1$$

(e quindi anche colle rette

$$(2'\ 10')_1\ ,\ (2'\ 9')_1\ ,\ (2'\ 4')_1\ ,\ (2'\ 3')_1\ )$$

godono rispetto ad 11, 12, 5, 6 delle stesse proprietà che la quaderna 1', 2', 7', 8' gode rispetto ai punti 7, 8, 1, 2 (ovvero la quaderna 3', 4', 9', 10' rispetto ai punti 9, 10, 3, 4). In vero 5' e 6' sono coniugati in [Σ] ed hanno 11 per tangenziale: Così pure 11, 12' sono coniugati in [Σ] ed hanno 12 per tangenziale;

Le rette (5' 11'), (6' 12'), si segano nel punto 5 e le $(5'\ 12')_1$, $(6'\ 11')_1$ nel punto 6, perchè le tre rette

$$(1'\ 9')_1\ ,\ (1'\ 3'\ 11)_1\ ,\ (3\ 5\ 7)_1$$

costituiscono una cubica spezzata, che insieme alla C_3 individua un fascio fra i cui punti base vi sono ancora gli allineamenti delle

due terne di punti 1', 1', 7; 3, 3', 9' quindi anche i tre punti 5, 5', 11' sono in linea retta: Analogamente per gli altri casi.

I dodici punti 1', 2',..., 12' così assegnati appartengono ad una Cf. del nostro tipo, perchè oltre agli allineamenti già stabiliti, cioè:

1' 3' 11', 2' 3' 12', 1' 4' 12', 2' 4' 11',
1' 5' 9', 2' 5' 10', 1' 6' 10', 2' 6' 9',

si hanno anche gli altri

7' 3' 5', 8' 3' 6', 7' 4' 6', 8' 4' 5',
7' 9' 12', 8' 9' 11', 7' 10' 11', 8' 10' 12':

Infatti le due cubiche spezzate

$$(5'\ 6\ 12')_1 \cdot (1\ 1'\ 7')_1 \cdot (3'\ 4'\ 10)_1$$
$$(1\ 6\ 10)_1 \cdot (1'\ 4'\ 12')_1 \cdot (5'\ 7'\ )_1$$

individuano un fascio al quale deve appartenere la C_3 e che avrà quindi per nono punto base 3', necessariamente situato sulla retta $(5'\ 7')_1$. In modo analogo si dimostrano gli altri sette allineamenti.

Questa Cf. $(12_4\ 16_3)$ dà manifestamente, colla costruzione indicata al n° 12, la Cf. dalla quale siamo partiti.

Dal fatto ragionamento risulta, che ogni Cf. del nostro tipo può essere ottenuta, nel modo che si disse, da $4 . 2 . 2 = 16$ altre Cf. dello stesso tipo.

Queste 16 Cf. si distinguono in quattro gruppi di quattro, ogni gruppo essendo relativo ad un quadrilatero della data Cf. Le quattro Cf. relative, ad un medesimo quadrilatero, sono costituite da rette aventi tutte la medesima seconda satellite, e le quattro seconde satelliti delle rette delle Cf. dei quattro gruppi formano un quadrilatero completo inscritto nella cubica, sicchè tutte le rette delle sedici Cf., le quali generano (come al n° 12) una data Cf. del nostro tipo, hanno una medesima terza satellite e questa è la retta alla quale è relativa (n° 5) la Cf. data.

Messina 25 Dicembre 1890.

Sull'azione disinfettante dei Saponi al Sublimato

Nota di E. DI MATTEI

letta nella seduta del dì 28 Dicembre 1890.

I risultati ottenuti da me in una serie di ricerche sui saponi comuni ad uso di lavanderia mi facevano estendere lo studio sur un'altra qualità di saponi detti *al sublimato*, e che vanno nella pratica e nell' uso comune fra le tante specie di saponi antisettici e medicinali.

Questi saponi al sublimato da me studiati sono esteri e nazionali; appartenenti i primi a fabbriche di Vienna e di Parigi, i secondi a fabbriche di Milano e di Roma. Gli uni e gli altri vanno in commercio col titolo della quantità di sublimato contenuto e sono quelli all' 1 al 2 al 5 °/₀: altri poi non portano alcun titolo; altri infine di titolo superiore che difficilmente si trovano in commercio, al 10 al 15 al 20 °/₀ ci sono stati appositamente fabbricati e forniti per questo lavoro dalla rinomata fabbrica Torti di Roma.

In questo studio io non mi sono occupato di indagare il processo di fabbricazione di questi saponi e li ho adoperati come vengono venduti in commercio e con quel titolo di quantità di sublimato che portano dalla Marca di fabbrica.

Questi saponi sono a pezzi, della forma e grandezza di una saponetta comune, ed hanno un colorito ora bianco-grigiastro, ora plumbeo, ora terreo: essi non si lasciano tagliare bene dal coltello, poichè facilmente si sgretolano in piccoli pezzi: sono discretamente pesanti, si sciolgono facilmente nell'acqua e danno pochissima spuma.

I saponi adunque da me studiati contengono una quantità varia di sublimato dall' 1 al 20 °/₀: e con essi, analogamente a quanto avevo praticato per i saponi comuni, ho intrapreso le mie ricerche, sia sciogliendo dei pezzi pesati di saponi in acqua sterilizzata (10 : 100) e in esse diluzioni saponate innestando delle colture

di microrganismi patogeni, sia seminando questi direttamente sulla superficie di essi saponi.

In quest' ultimo caso dopo un tempo determinato si ripigliava con ago di platino sterilizzato la cultura dal punto ove si era seminata e si innestava in terreni nutritivi dei quali, nei casi dubbî mi servivo per le colture piatte rispettive. È naturale che in questi casi si aveva l' accortezza di seminare sulla superficie dei saponi soltanto microrganismi, senza trasportare con essi dei frammenti di sostanza nutritiva; la quale depositata anch' essa sulla superficie del sapone ne avrebbe potuto far variare i resultati per la ragione facile a comprendersi che i microrganismi, oltre al non poter subire il diretto contratto con il sapone, avrebbero potuto per via del materiale nutritivo così trasportato o vivere per un tempo più lungo o scampare alla morte addirittura: come anche è inutile dire che ripigliando dalla superficie dei saponi la cultura seminata si aveva cura di non trasportare con essa delle tracce di sapone. Credo utile a questo punto accennare come questi saponi siano un pò avidi di acqua; epperò a riprese si lasciava cadere sul punto seminato qualche goccia di acqua distillata sterilizzata per mantenervi un discreto grado di umidità.

Nel primo caso poi delle diluzioni dei saponi, la cultura, da terreni nutritivi distesi in superficie a becco di flauto veniva, come anche pel caso precedente, raccolta leggermente con una spatola di platino e sciolta in acqua distillata sterilizzata in modo da fare come un' emulsione torbida lattiginosa. Di essa con una pipetta sterilizzata se ne aspirava una discreta quantità che veniva versata a gocce, aumentandone sempre il numero, in diversi tubi contenenti le diluzioni saponate, preparate come detto precedentemente. Dopo un periodo di tempo determinato, avendo già preventivamente curato che le gocce fossero venute a contatto diretto con la diluzione, si aspirava mediante una pipetta sterilizzata una quantità stabilita (da una a due gocce) di essa diluzione saponata ben agitata e si versava in tubi di brodo, e contemporaneamente in tubi di gelatina che servivano per farne colture piatte; si facevano

inoltre degli innesti con essa diluzione in tubi di gelatina agarizzata che si mettevano nella incubatrice per avere uno sviluppo più rapido dei microrganismi.

I microrganismi da me studiati sono parecchi: il vibrio del colera asiatico, il bacillo del tifo, quello del carbonchio, lo stafilococco piogeneo aureo, e lo streptococco piogeno.

Il bacillo del carbonchio si studiava prima che fosse sporificato e come bacillo sporificato. Nel primo caso si versava una goccia di sangue del cuore di animale carbonchioso sulla superficie del sapone: nell' altro caso si pigliava il materiale carbonchioso da patata o da una cultura d' agar (col metodo di Buchner) o da altro mezzo nutritivo, dopo esserci in ogni caso assicurati mediante esame microscopico che i bacilli erano sporificati.

Volendo compendiare in breve tutte le varie osservazioni fatte allo scopo di non dilungarci e qualche volta ripeterci nella loro singola enumerazione io le riassumo in una tabella.

E per maggior brevità mi permetto di aggruppare i saponi studiati in tre categorie secondo il titolo di sublimato contenuto: nella prima comprendo quelli all' 1-2 %, nella seconda quelli al 7 e 10 p. %, nella terza quelli al 15-20 %. In ragione di questo titolo, e in base ai risultati ottenuti chiamerò i primi *saponi deboli*, i secondi *saponi medî*, gli ultimi *saponi forti*.

Rappresento con P il risultato positivo dell' innesto, con p lo sviluppo lento e poco rigoglioso di esso, con N il risultato negativo.

Microrganismi seminati direttamente sulla superficie dei

	Saponi deboli 1-2 %									Saponi medî 7-10 %									Saponi forti 15-20 %								
	ed innestati nei terreni nutritivi dopo																										
	5'	10'	15'	30'	60'	2h	6h	12h	24h	5'	10'	15'	30'	60'	2h	6h	12h	24h	5'	10'	15'	30'	60	2h	6h	12h	24h
V. del colera	P	P	P	N	N	N	N	N	N	P	p	N	N	N	N	N	N	N	p	N	N	N	N	N	N	N	N
B. del tifo	»	»	»	P	P	»	»	»	»	»	P	P	P	»	»	»	»	»	P	P	p	»	»	»	»	»	»
B. del carbonchio	»	»	»	»	»	P	P	»	»	»	»	»	»	P	P	p	»	»	»	»	P	P	P	p	»	»	»
B. del carb. sporig.	»	»	»	»	»	»	»	P	P	»	»	»	»	»	»	P	P	P	»	»	»	»	»	P	P	»	»
Staf. piog. aureo	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	N	N	»	»	»	»	p	N	N	»	»

È da notare che oltre gl' innesti a periodo determinato facevo anche dei preparati microscopici allo scopo di vedere se la presenza dei microrganismi coincidesse con il loro sviluppo nei mezzi nutritivi, e la scomparsa con la impossibilità di potersi ulteriormente sviluppare. I risultati di queste osservazioni microscopiche furono d' accordo con i risultati degli innesti per i bacilli del colera e del tifo; mentre che per i bacilli del carbonchio e per lo stafilococco piogeneo aureo noi potevamo ancora microscopicamente notare la loro presenza, quando nello stesso periodo di tempo non erano stati più capaci di sviluppo nei mezzi nutritivi. Si presentavano infatti i bacilli del carbonchio spezzettati, con protoplasma rarefatto, non molto colorabili e molti anche granulosi e ridotti a detrito.

Volendo in questo periodo vedere se ad onta della loro incapacità di sviluppo questi microrganismi conservassero la loro azione patogena, feci delle inoculazioni sottocutanee negli animali con il sottile detrito della superficie di sapone seminato e diluito con acqua. I risultati ottenuti da questi esperimenti sugli animali furono tutti negativi : i bacilli del carbonchio e rispettivamente lo stafilococco piogeno aureo dovevano quindi essere stati distrutti , o in ogni caso aver perduto il loro potere patogeno.

Aggiungo però che la loro presenza non persisteva molto tempo sulla superficie di sapone , e che dopo qualche tempo da che si erano mostrati incapaci di svilupparsi essi sparivano poi del tutto.

Volendo in ultimo vedere se i predetti microrganismi, tolti dopo vario tempo dalla superficie di saponi seminati, benchè capaci di sviluppo nei terreni nutrivi avessero poi mantenuto integro il loro potere patogeno, ho fatto negli animali delle inoculazioni con il materiale di cultura proveniente dagli innesti diretti del detrito saponaceo seminato, e rispettivamente inoculazioni col detrito saponaceo raccolto subito dalla superficie di sapone.

I risultati sono stati i seguenti. Le inoculazioni negli animali con culture in cui lo sviluppo era discreto, cioè a dire quelle culture provenienti da innesti di microrganismi , che erano stati per

un tempo relativamente breve a contatto della superficie di sapone, furono positive, sebbene in ogni caso la morte negli animali (se inoculati per carbonchio) sia avvenuta dopo un tempo più lungo dell'ordinario (5-8 giorni); e la suppurazione in altri (se inoculati con staf. piog. aureo) sia stata più limitata e più tardiva.

Le inoculazioni invece fatte con culture a sviluppo stentato, piccolo, e tardo, corrispondenti a quelle dei microrganismi a contatto del sapone per un tempo più lungo furono negative; gli animali potevano mostrarsi a volte ammalati per qualche giorno ma più tardi riuscivano a scamparla.

Quasi analoghi ai precedenti però sono stati i risultati quando le inoculazioni negli animali, invece di farsi con gli innesti dei microrganismi presi dai terreni nutritivi, si facevano inoculando direttamente sotto cute i microrganismi raschiati dalla superficie del sapone seminato. Ma qui pel carbonchio distinguiamo subito due fatti, a secondo che l' innesto si faceva o raschiando la superficie di sapone, ed inoculando direttamente questo detrito saponaceo sotto la cute, o diluendo questo detrito in acqua ed inoculandolo dopo che esso s' era in questa disciolto. Si ottenne più volte il fatto che a parità di durata di tempo , relativo alla seminazione dei microrganismi nel sapone, mentre nel primo caso l'animale, specialmente se robusto, inoculato resisteva , nel secondo caso poteva soccombere. Ciò da noi veniva facilmente spiegato ammettendo nel primo caso il fatto che i bacilli pur stando sotto la cute, rimanendo inglobati entro il detrito saponaceo, non avessero potuto estrinsecare tutta la loro azione ; mentre che nel secondo caso essendo liberi potevano più facilmente venire in contatto più diretto dei tessuti ove manifestare tutta la loro attività.

Per queste esperienze abbiamo potuto vedere che non per tutta quella durata di tempo, nella quale i microrganismi portati in terreni nutritivi si mostrano capaci di sviluppo, possono essi eziandio mantenere sempre integro il loro potere patogeno. Analogamente a una serie di esperienze sui saponi comuni, anche qui ci è stato dato poter osservare che, qualche tempo prima di perdere la ca-

pacità di svilupparsi nei terreni nutritivi, perdono già o attenuano di molto il loro potere patogeno.

Dalle mie esperienze risulta che i bacilli del carbonchio presi dopo due ore dalla seminagione dalla superficie dei saponi forti (15-20 %) inoculati negli animali non si sono mostrati più capaci di ucciderli. Gli animali si mostravano per uno o due giorni non più vispi e non mangiare come prima per rimettersi completamente al 3° o al 4° giorno.

Analogamente avveniva per le esperienze fatte con lo stafilococco piogeno aureo, il quale dopo 30'-60' di durata nei *saponi forti* (20 p. %) esso perdeva la proprietà di determinare delle suppurazioni sotto la cute degli animali nei quali s' inoculava.

Questi fatti di attenuazione però non erano ugualmente confortati dalle esperienze sui *saponi deboli* ; invece erano eziandio discretamente rilevabili nelle esperienze fatte coi *saponi medii*, sebbene essi a lor volta non fossero paragonabili ai risultati coi *saponi forti*.

Le esperienze fatte con le diluzioni concentrate delle diverse qualità dei saponi hanno quasi convalidato i risultati ottenuti, seminando i microrganismi sulle superficie dei saponi. Anzi questa analogia di risultati era più evidente quando le colture da terreni solidi si diluivano in acqua sterilizzata e se ne versavano delle gocce (da 2-10) nelle diluzioni concentrate saponacee.

Però è da notare che quanto più aumentava la quantità delle gocce di cultura diluita in acqua (da 2 a 10) tanto più lunga era la loro presenza e la loro resistenza nelle diluzioni saponate. Come anche è da notare che analogamente a quanto si osservò per le diluzioni dei saponi comuni la durata e la resistenza dei microrganismi nelle diluzioni saponate era molto più rilevante quando la cultura dei germi era in brodo; poichè in questo caso assieme alle gocce si trasportava un nutrimento opportuno alla loro più lunga conservazione. Ed in fine è da porre anche in rilievo il fatto che quanto meno concentrata era la diluzione saponacea tanto meno attiva si mostrava la sua azione sui microrganismi. Così che nelle diluzioni

saponate deboli non concentrate e paragonabili a quelle che ordinariamente si fanno nell'uso comune per la pulizia della cute e delle mani ecc. in questi casi, qualunque fosse il titolo dei sali mercuriali da essi saponi contenuto, essi si mostravano di nessuna efficacia o quasi e in nulla superiore a quella dei saponi comuni. Possiamo quindi venire a formulare qualche conclusione generale che riassuma per sommi capi i risultati ottenuti.

I saponi al sublimato all' 1-2 % che sono quelli che più comunemente si trovano in commercio , e le loro diluzioni si mostrano quasi inattivi e sono in nulla o assai poco superiori ai saponi comuni adoperati in commercio ; infatti i bacilli del colera, quelli del tifo, quelli del carbonchio e lo stafilococco piogeno aureo si comportano sia per la loro capacità di sviluppo sia per il loro potere patogeno quasi analogamente come per i saponi comuni. Nulla d' importante quindi è da sperarsi nell'uso comune della loro efficacia.

I saponi al sublimato al 7-10 % si mostrano più attivi dei saponi sopradetti; imperciocchè i microrganismi del colera e del tifo muojono piuttosto presto, e quelli del carbonchio e lo stafilococco piogeno aureo perdono anche presto la loro capacità a svilupparsi nei terreni nutritivi e prima ancora di essa attenuano e a volte perdono il loro potere patogeno.

Finalmente i saponi forti cioè quelli al 15-20 % agiscono ancor più attivamente tanto sui bacilli del colera e del tifo , che vengono distrutti in alcuni minuti, quanto sui bacilli del carbonchio e sullo stafilococco, i quali pur vivendo su di essi una vita relativamente breve e non del tutto florida, perdono ancora assai per tempo il loro potere patogeno.

Sarebbe quindi da questi saponi, a un titolo di sublimato così elevato, e che si spacciano difficilmente in commercio, forse per difficoltà inerenti alla loro preparazione, che può aversi un'efficacia discreta.

Cerchiamo adesso di indagare, sebbene non sia compito diretto di queste ricerche, quale sia il composto mercuriale che viene

a formarsi nella preparazione di detti saponi e che agisce come abbiamo veduto in modo piuttosto attivo sui microrganismi. E ne vale la pena tanto più che questi saponi così preparati, specialmente quelli forti (15-20 %), possono essere come si è accennato di qualche utilità.

Io in un primo lavoro ho accennato che l' azione disinfettante dei saponi comuni e la loro azione di attenuare la virulenza dei microrganismi doveva attribuirsi ai grassi principalmente (Manfredi) o agli alcali o ad ambedue i fattori che vanno a far parte della composizione dei saponi.

Qui adesso aggiungiamo che l' azione disinfettante ed attenuante dei saponi al sublimato, specialmente dei *saponi forti* studiati, è assai più energica perchè sono cresciuti i fattori che agiscono sui microrganismi; poichè oltre ai grassi, oltre agli alcali, resta ancora un composto energico a base mercuriale, che viene a formarsi nella mescolanza e che è appunto quello che avvalora e rinforza l'azione disinfettante predetta.

Secondo Guido Pellizzari questo composto mercuriale è in generale una sostanza insolubile, poichè quando al sapone si mescola un sale metallico (nel caso nostro sale mercuriale) allora per doppia decomposizione si viene a formare l' oleato lo stearato e il palmitato del sale mercuriale che sono poco o punto solubili nell' acqua: e quindi questi saponi non conservano altro *dei saponi al sublimato corrosivo* che il nome sull' etichetta; poichè l' alcalinità del sapone deve a priori far ritenere che il cloruro mercurico deve essersi modificato.

Facendo di questi saponi una soluzione acquosa non si ha mai, come anche osserva Pellizzari, un liquido limpido. Filtrando questo ed analizzando da un lato la parte insolubile sul filtro e dall' altro la parte solubile nel liquido filtrato, si trova che la prima è formata principalmente da sale mercurico e la seconda formata anche da piccola quantità del predetto sale che un poco si è sciolto.

È egli vero che le acque ove sono stati immersi alcuni sali

mercuriali insolubili o pochissimo solubili (bijoduro di mercurio, joduro mercuroso, solfuro nero, solfuro rosso, calomelano etc.) non hanno alcun potere antisettico o abbastanza limitato come abbiamo dimostrato in altro lavoro; e che quindi per analogia è da pensare che lo stesso debba avvenire con le piccole quantità di sale mercuriale formatosi nel sapone e sciolto nell' acqua; ma pur d' altro lato non può revocarsi in dubbio che questi sali mercuriali insolubili o poco solubili, se messi nei terreni nutritivi, son capaci ad impedire lo sviluppo ed anche a uccidere i germi patogeni mano mano che la quantità dei sali introdotti viene ad aumentarsi; come infine non può disconoscersi che questi sali mercuriali benchè insolubili hanno una grandissima potenza microbicida, secondo quanto si è altrove dimostrato, quando vengono adoperati allo stato polverulento, o ridotti per mezzo di acqua a poltiglia.

Ora dunque se anche per i sali mercuriali insolubili noi si deve ammettere un' azione disinfettante più o meno energica a secondo lo stato e la quantità adoperata, ci sembra che quest' azione debba estendersi a quegli altri sali che vanno a formarsi nel sapone, quando in questo si è aggiunto un sale mercuriale anche solubile come il sublimato, il quale va nella preparazione a decomporsi e a combinarsi, formando dei composti mercuriali insolubili. Ed è così soltanto che possono venire giustificati i risultati ottenuti nelle mie esperienze.

Un' obbiezione relativa all'applicazione di detti saponi nella pratica io trovo naturale, quella cioè che la saponata che viene a formarsi con essi, nell' uso comune di lavatura delle mani e della pelle, sia da un lato forse una diluzione saponata un po' debole, e dall' altro tanto breve il suo contatto con la cute, da non lasciare per ambo le ragioni col suo impiego una completa sicurezza sulla sua efficacia. Ed è quindi certo che per un' *antisepsi scrupolosa* o per una *sicura disinfezione* non ricorreremmo davvero al sapone al sublimato, e che d' accordo con Pellizzari preferiremmo adoperare separatamente il sapone comune prima e la soluzione al sublimato dopo. Ma non è anche men vero che i saponi forti, seb-

bene non siano destinati ad alcun vero successo, o a sostituire menomamente le comuni soluzioni di sublimato, pure se potessero aversi facilmente in commercio, a buon prezzo e senza inganno di titolo, ben frequente, essi potrebbero rendere dei servizî utili, anche nelle famiglie (in casi di colera o di tifo) per la disinfezione d'urgenza di effetti di biancheria; potendosi questi, in specie se piccoli, facilmente disinfettare, o con la strofinazione diretta di tali saponi su essi, o con la loro immersione in diluzioni concentrate di questi saponi.

Sul calore specifico fino ad alta temperatura delle lave dell'Etna e di altri vulcani

Nota del Prof. ADOLFO BARTOLI.

La cognizione del calore specifico delle lave ha certamente qualche importanza per molti problemi della fisica terrestre, ma fino ad oggi non si hanno che pochissimi dati per la temperatura ordinaria, mentre se ne cercano invano per temperature elevate (1).

Ho cercato di colmare questa lacuna misurando il calore specifico fra la temperatura ordinaria e quella di + 800°, per un gran numero di lave dell' Etna, di Vulcano, del Kilauea, etc., nonchè di altre roccie di origine vulcanica. I campioni mi furono per la maggior parte favoriti dal compianto Prof. Silvestri (2).

La roccia veniva adoperata in piccoli dadi di sei millimetri di lato. Il calore specifico medio fra la temperatura ordinaria e quelle di + 100° fu determinato col metodo del calorimetro ad acqua, impiegandovi quella stessa stufa che mi servì già per la misura del calore specifico della Mellite (3).

Diverse difficoltà s' incontrano per le temperature elevate.

Queste difficoltà tengono principalmente:

1. A mantenere costante per un certo tempo una elevata temperatura ed a valutarla esattamente.

---

(1) I dati si riferiscono piuttosto al calore specifico medio fra 0° e 100° di molte specie minerali. Compara *A. Neumann*, Lehr und Handbuch der Termochemie, *Braunschweig*, 1882, pag. 255-265, dove son riportate le determinazioni di Regnault, Neumann, Dulong e Petit H. Kopp, Person, Pape. Recentemente il Sig. I. Ioly ha pure determinato il calore specifico di oltre 50 minerali (fra la temperatura ordinaria e quella di 100°) Proc. of the royal society Vol. XLI, N. 248, pag. 250 (Novembre 1886).

(2) Molte di queste lave furono analizzate dal compianto Prof. Silvestri, ed i risultati furono da lui pubblicati negli atti dell' Accademia Gioenia di Catania; 3ª Serie (passim).

(3) *Bartoli* e *Stracciati*; Nuovo Cimento, 3ª serie, T. XVI pag. 1, Pisa 1884; e Gazzetta Chimica, T. XIV, Palermo 1884.

2. Ad evitare l'errore prodotto dalla vaporizzazione dell'acqua, quando vi s'immerge un corpo molto caldo.

Per riscaldare il corpo io ho impiegato un buon fornello Perrot a muffola orizzontale. Questa venne internamente rivestita da una corazza di ferro spessa quasi un centimetro, per rendere uniforme la temperatura delle pareti: essa era tenuta chiusa da un grosso tappo di terra refrattaria, munito di due fori: pei quali passavano con leggiero attrito le bacchette di due cucchiaje di ferro foggiate a guisa di scatola parallelepipeda, aperta alla faccia opposta a quella dove era inserita la bacchetta.

Nell'una di queste cassette erano dei grossi pezzi di platino (del peso complessivo di 182 grammi) e nell'altra i pezzi della roccia, in tal massa da equivalere calorificamente al platino.

Regolando convenientemente l'apertura del gaz, riusciva dopo qualche ora, a mantenere entro la muffola una temperatura stazionaria, cosa di cui potevo accertarmi, per mezzo di una conveniente termopila di cui una saldatura penetrava nello interno della muffola.

Allora, con una manovra rapidissima (la quale richiedeva tre secondi circa) veniva aperta la muffola, estratte le due cucchiaje, e rovesciatone il contenuto entro due calorimetri ad acqua, uguali, molto vicini al fornello e perfettamente riparati dallo irraggiamento di questo.

Ad evitare la vaporizzazione dell' acqua in contatto con corpi caldissimi, ciaschedun calorimetro portava una camera formata da due cilindri di rame, penetranti l' uno dentro l' altro, a guisa di rubinetto: ciascheduno dei due cilindri era munito di fori per la metà della sua superficie; col girare convenientemente il cilindro interno, i fori di questo potevano combinare con quelli del cilindro esterno; si poteva cioè mantenere chiuso l' ingresso all' acqua del calorimetro, oppure farla penetrare nell'interno della camera: inoltre questa poteva chiudersi perfettamente in alto col mezzo di un coperchio.

Al principio della esperienza la camera era affatto priva di

acqua ed aperta in alto. Appena vi era caduto il corpo caldo, la si chiudeva ermeticamente, per evitare perdite di calore per correnti di aria: dopo un minuto si girava il cilindro interno in modo che l'acqua penetrando nella camera, venisse in contatto col corpo, già raffreddato.

Il platino che veniva a cadere nell'altro calorimetro, mi dava, col metodo Pouillet-Violle (1) la temperatura iniziale della roccia.

I termometri furono quelli stessi che mi servirono per la misura del calore specifico dell' acqua. (2) Come riprova che il metodo è sufficientemente esatto (almeno pel caso di roccie le cui proprietà fisiche variano sensibilmente da pezzo a pezzo di uno stesso campione) ho rideterminato il calore specifico del quarzo ad alte temperature, ed ho ottenuto resultati quasi identici a quelli del Sig. Pionchon. (3) Così pure il ferro ha dato numeri ben d'accordo con quelli del Pionchon e del Naccari (4).

Aggiungo senz'altro la tavola seguente, la quale contiene tutti i dati necessari pel calcolo del calore specifico medio fra la temperatura ordinaria e quella T, per le diverse lave studiate, avvertendo però, che la temperatura iniziale t del calorimetro fu letta quando essa era stabile da venti minuti, e che per la temperatura finale fu fatta la correzione del raffreddamento secondo Regnault (5).

I valori di C sono dati con tre cifre significative, quantunque, dopo un accurato esame, io non possa rispondere che della esattezza delle prime due.

Insieme ho aggiunto il peso specifico medio della lava, misurato sul campione stesso che mi ha servito per la determinazione del calore specifico.

Ecco il significato delle lettere che entrano nella tavola seguente:

(1) *Violle*, Comptes Rendus, T. 85, pag. 543, Anno 1877.

(2) *Bartoli* e *Stracciati*. Nuovo Cimento, Pisa 1885; Rend. della R. Accademia dei Lincei, Roma 1885: e Bullettino dell'Accademia Gioenia di Catania, Maggio 1889, Fascicolo VII.

(3) *Pionchon*, Comptes Rendus, T. 106, pag. 1344-1347, Anno 1888.

(4) *Naccari*, Atti della R. Accademia delle scienze di Torino Vol. XXII, Decembre 1887.

(5) *Naccari*, Vedi per esempio Manuale di Fisica, pag 277.

P peso dell' acqua del calorimetro, più l' equivalente in acqua del vaso calorimetrico, dell' agitatore e del termometro;

P' peso della lava;

T temperatura iniziale della lava;

t temperatura iniziale del calorimetro;

θ temperatura del calorimetro dopo 2' dalla caduta del corpo caldo;

θ' temperatura del calorimetro dopo 6';

C calore specifico medio della lava fra T e θ;

δ peso specifico della lava, alla temperatura ordinaria.

Denominazione	P	P'	T	t'	θ	θ'	C medio fra T e θ	δ
Lava compatta dell'Etna dell' eruzione del 1669	613	60	99,82	21,70	23,20	23,16	**0,201**	
	816	30	506,5	22,20	26,80	26,68	**0,263**	**2,90**
	816	30	786,5	24,85	32,27	32,05	**0,270**	
Lava compatta dell'Etna dell'eruzione del 1879	613	100	99,80	18,73	21,19	21,10	**0,195**	**2,78**
	816	30	449,5	22,43	26,80	26,76	**0,282**	
Lava scoriacea dell'Etna dell'eruzione del 1879	613	35	99,82	21,79	22,64	22,62	**0,195**	**2,57**
	816	30	570,1	23,50	28,64	28,50	**0,261**	
Lava compatta dell'Etna dell'eruzione del 1886	613	100	99,79	18,70	21,37	21,30	**0,210**	**2,87**
	816	30	464,3	22,97	27,44	27,34	**0,280**	
Lava basaltica della grotta delle Palombe (sull' Etna)	613	59	99,81	21,45	22,93	22,90	**0,201**	
	816	30	576,9	25,31	30,45	30,32	**0,258**	**2,81**
	816	30	776,3	23,85	30,88	30,70	**0,259**	
Lava subvitrea dell'isola di Vulcano	613	97,5	99,82	18,20	20,65	20,55	**0,198**	—
Lava pomice di Vulcano (presa dall' interno di una bomba)	613	47,5	99,81	18,58	19,81	19,77	**0,202**	
	816	30	389,1	25,28	28,80	28,73	**0,267**	**2,20**
	816	20	408,4	23,47	26,06	26,01	**0,278**	
Liparite di Vulcano	613	100	99,82	18,35	20,85	20,75	**0,197**	
	816	30	561,7	24,30	29,38	29,22	**0,262**	**2,47**
	816	30	659,8	24,65	30,55	30,44	**0,257**	
Conglomerato liparitico di Vulcano	613	81	99,81	18,51	20,58	20,58	**0,198**	
	816	30	574,3	23,91	29,07	28,92	**0,260**	**2,55**
	816	29	823,1	24,31	31,28	31,10	**0,250**	
Lava pomice di Lipari	613	40	99,80	18,65	19,70	19,66	**0,202**	—
Lava dell' isola Linosa	613	60	99,81	21,53	23,03	23,00	**0,201**	
	816	30	553,5	25,50	30,41	30,24	**0,258**	—
	816	30	790,2	24,10	31,13	30,95	**0,254**	
Lava trachitica del Monte Calvario a Biancavilla	613	70	99,87	21,85	23,57	23,51	**0,199**	
	816	30	328,3	23,05	25,62	25,57	**0,233**	**2,68**
	816	30	642,4	24,85	30,65	30,47	**0,261**	

Denominazione	P	P'	T	t'	θ	θ'	C medio fra T e θ	δ
Lava del Kilauea (vulcano delle isole Sandwich) (1)	613 816 816	70 30 30	99,74 493,4 696,2	23,10 25,02 22,87	24,77 29,33 29,20	24,70 29,22 29,08	0,197 0,255 0,260	2,88
Lava di Militello	613 816	80 30	99,79 754,4	19,00 23,28	21,10 29,97	21,04 29,82	0,206 0,253	2,71
Ciclopite con basalto	613 816	79 30	99,86 225,3	20,17 24,95	21,82 26,95	21,78 26,90	0,165 0,277	2,86
Lava del Monte Dolce (sull' Etna)	613 816 816	70 30 30	99,87 374,6 687,8	22,01 25,62 27,95	23,74 28,52 34,20	23,69 28,47 34,00	0,201 0,229 0,263	2,78
Lava della valle di S. Giacomo	613 816 816	70 30 30	99,87 381,4 742,0	21,95 25,10 26,77	23,68 28,36 33,68	23,62 28,28 33,50	0,201 0,253 0,268	—
Breccia vulcanica del capo Pachino	613 816	88 30	99,81 741,9	19,17 25,54	21,56 32,34	21,50 32,14	0,215 0,263	2,81
Lava del capo Pachino	613 816	107 30	99,82 724,0	19,30 24,57	22,20 31,40	22,08 31,22	0,217 0,270	2,68
Lava preistorica del Monte Umberto e Margherita (sull' Etna)	613	70	99,87	22,02	23,73	23,68	0,199	2,66
Lava con grossi cristalli di orneblenda (a Pizzillo) sulla costiera	613 816 816	70 30 30	99,87 524,1 750,5	22,01 24,87 27,35	23,77 29,21 34,04	23.71 29,12 33,85	0,205 0,240 0,256	2,79
Enceladite dell'Etna tipo pomiceo dell'eruzione del 26 Maggio 1886	613	49,6	99,83	21,47	22,65	22,63	0,191	1,98
Enceladite dell'Etna (tipo compatto, della eruzione 26 Maggio 1886)	613 816	50 30	99,83 728,7	21,50 24,72	22,75 31,50	22,73 31,33	0,201 0,267	—
Tifeite (dell' Eruzione del 26 Maggio 1886)	613 816 816	40 20 20	99,87 241,0 738,5	21,87 23,05 25,65	22,85 24,18 30,43	22,82 24,17 30,30	0,197 0,213 0,278	2,44
Orneblenda delle antiche lave dell'Etna	613 816	69,6 30	99,79 535,8	21,25 25,62	22,94 30,75	22,90 30,60	0,195 0,279	3,12
Feldispato, labradorite dell' Etna	613 816	50 30	99,93 528,1	20,41 25,10	21,80 30,34	21,80 30,20	0,218 0,289	—
Pirosseno augite dell'Etna	613 816	70 30	99,93 686,3	20,43 25,30	22,28 31,70	22,24 31,50	0,210 0,269	3,31
Ossidiana di Lipari	613 816 816	100 30 30	99,88 512,8 796,6	18,65 24,50 27,25	21,19 29,30 34,90	21,05 29,17 34,63	0,202 0,272 0,276	2,36

(1) È lo stesso campione che fu già studiato dal compianto Prof. Silvestri—Atti dell'Accademia Gioenia. 3ª Serie, T. XX. pag. 189 (Anno 1888).

Da questa tavola risulta chiaramente che il calore specifico delle lave cresce dapprima rapidamente colla temperatura, e che a temperature molto elevate tende ad un certo limite determinato; resultato analogo a quello ottenuto dal Sig. *Pionchon* pel quarzo. (1)

Dal Gabinetto di Fisica della R. Università di Catania, Gennajo 1891.

---

(1) *Pionchon*, Comptes Rendus pag. 1344-1347, Anno 1888, e Beiblätter zu den Annalen der Physik, Bd. XII. S. 769.

Sugl' integrali primi di secondo grado rispetto alle derivate delle coordinate nei problemi della meccanica

Nota del prof. GIOVANNI PENNACCHIETTI

letta all' Accademia Gioenia nell' adunanza del dì 28 dicembre 1890.

Supponiamo ridotte le equazioni del moto d' un sistema di punti materiali, libero od a legami qualsiansi, invariabili o no col tempo, alla forma:

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = X_s \ (s = 1, 2, \ldots n)$$

dove le x_s sono n quantità indipendenti, che determinano la configurazione del sistema, e che chiameremo *coordinate generali* del sistema stesso. Similmente con Thompson denomineremo *componenti generali* delle forze le quantità X_s, le quali dipendono non solo dalle componenti, secondo tre assi ortogonali, delle forze, che sollecitano i singoli punti del sistema, ma anche dai legami di questo. Supporremo che le componenti, secondo gli assi, siano funzioni delle coordinate dei punti del sistema, delle derivate di queste coordinate rispetto al tempo, e possano pure essere funzioni esplicite del tempo; ma supporremo contemporaneamente che, come può avvenire, le quantità X_s siano funzioni delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ e inoltre funzioni esplicite del tempo, senza però che dipendano dalle derivate $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ delle coordinate generali rispetto al tempo. Ciò posto, determino la forma precisa che, in quest' ipotesi,

deve avere un' equazione di primo o secondo grado rispetto alle derivate delle coordinate generali, affinchè essa sia integrale d' un problema. Osservo che queste equazioni possono essere integrali d' un problema, eziandio quando le X_s siano funzioni, oltrechè delle $x_1, x_2, \dots x_n$, anche delle derivate $x'_1, x'_2, \dots x'_n$, e contengano pure esplicitamente il tempo. Ritrovo per integrali di secondo grado, che possono essere distinti dall'integrale delle forze vive, qualche proprietà, che ha analogia con le note proprietà di quest' ultimo integrale, e riduco l' equazioni del moto alla forma canonica di Hamilton in casi, in cui può anche non esistere una funzione delle forze.

§ I.

Cerchiamo le condizioni che sono necessarie e sufficienti, affinchè, nell' ipotesi che le X_s siano funzioni delle sole coordinate generali, oltrechè funzioni esplicite del tempo, il sistema delle equazioni del moto :

$$\frac{d^2x_s}{dt^2} = X_s \qquad (s = 1, 2, \dots n) \tag{1}$$

ammetta un integrale primo della forma:

$$\frac{1}{2}(a_{11}\,x_1'^2 + \dots + a_{nn}\,x_n'^2 + 2a_{12}\,x'_1\,x'_2 + 2a_{13}\,x'_1\,x'_3 + \dots + 2a_{n-1,n}\,x'_{n-1}\,x'_n$$
$$+ 2c_1\,x'_1 + \dots + 2c_n\,x'_n) = F(t, x_1, x_2, \dots x_n) + \alpha\,, \tag{2}$$

dove si ha :

$$x'_s = \frac{dx_s}{dt}\,, \quad a_{rs} = a_{sr}\,,$$

e in cui le quantità a_{rs}, c_s sono funzioni di $x_1, x_2, \dots x_n$, e possono contenere pure il tempo esplicitamente, mentre α è una costante arbitraria.

Derivando la (2) totalmente rispetto a t, e sostituendo quindi alle $\frac{d^2 x_s}{dt^2}$ le X_s, si ottiene:

$$\sum_r \frac{\partial a_{rr}}{\partial x_r} x_r'^2 + \sum_{rs} \left(\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_s} + 2 \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_r} \right) x_r'^2 x_s' + 2 \sum_{rsh} \left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{sh}}{\partial x_r} + \frac{\partial a_{hr}}{\partial x_s} \right) x_r' x_s' x_h'$$

$$+ \sum_r \left(2 \frac{\partial c_r}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{rr}}{\partial t} \right) x_r'^2 + 2 \sum_{rs} \left(\frac{\partial c_r}{\partial x_s} + \frac{\partial c_s}{\partial x_r} + \frac{\partial a_{rs}}{\partial t} \right) x_r' x_s'$$

$$+ 2 \sum_r \left(\sum_h a_{rh} X_h - \frac{\partial F}{\partial x_r} + \frac{\partial c_r}{\partial t} \right) x_r' + 2 \sum_r c_r X_r - 2 \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Siccome in quest'equazione le quantità $x'_1, x'_2, \dots x'_n$ figurano soltanto esplicitamente, l'equazione (2) non può essere integrale del sistema (1), a meno che l'ultima equazione scritta non si scinda nelle seguenti:

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{sh}}{\partial x_r} + \frac{\partial a_{hr}}{\partial x_s} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial x_s} + \frac{\partial c_s}{\partial x_r} + \frac{\partial a_{rs}}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

$$\sum_r c_r X_r = \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\sum_r a_{hr} X_r = \frac{\partial F}{\partial x_h} - \frac{\partial c_h}{\partial t}, \tag{6}$$

dove gl'indici r, s, h sono tre numeri qualunque della serie $1, 2, \dots n$, e possono anche essere eguali tutti e tre o due soltanto di essi, sicchè le (3) sono in numero di $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ e le (4) in numero di $\frac{n(n+1)}{2}$.

§ II.

Dalle (I, 3) si deduce facilmente che le quantità a_{rs} sono, rispetto alle x_s, polinomi razionali interi di secondo grado.

Infatti supponiamo che le cinque lettere r, s, h, i, j rappresentino numeri qualunque della serie 1, 2, ... n, in modo che lettere differenti possono anche rappresentare lo stesso numero.

Derivando le (I, 3), se ne traggono l' equazioni:

$$\frac{\partial^3 a_{rs}}{\partial x_h \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{sh}}{\partial x_r \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{hr}}{\partial x_s \partial x_i \partial x_j} = 0, \qquad (rsh)$$

$$\frac{\partial^3 a_{rs}}{\partial x_i \partial x_h \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{si}}{\partial x_r \partial x_h \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{ir}}{\partial x_s \partial x_h \partial x_j} = 0, \qquad (rsi)$$

$$\frac{\partial^3 a_{rh}}{\partial x_i \partial x_s \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{hi}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{ir}}{\partial x_h \partial x_s \partial x_j} = 0, \qquad (rhi)$$

$$\frac{\partial^3 a_{sh}}{\partial x_i \partial x_r \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{hi}}{\partial x_s \partial x_r \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{is}}{\partial x_h \partial x_r \partial x_j} = 0, \qquad (shi)$$

$$\frac{\partial^3 a_{rs}}{\partial x_j \partial x_h \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{sj}}{\partial x_r \partial x_h \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{jr}}{\partial x_s \partial x_h \partial x_i} = 0, \qquad (rsj)$$

$$\frac{\partial^3 a_{rh}}{\partial x_j \partial x_s \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{hj}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{jr}}{\partial x_h \partial x_s \partial x_i} = 0, \qquad (rhj)$$

$$\frac{\partial^3 a_{sh}}{\partial x_j \partial x_r \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{hj}}{\partial x_s \partial x_r \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{js}}{\partial x_h \partial x_r \partial x_i} = 0, \qquad (shj)$$

$$\frac{\partial^3 a_{ri}}{\partial x_j \partial x_s \partial x_h} + \frac{\partial^3 a_{ij}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_h} + \frac{\partial^3 a_{jr}}{\partial x_i \partial x_s \partial x_h} = 0, \qquad (rij)$$

$$\frac{\partial^3 a_{si}}{\partial x_j \partial x_r \partial x_h} + \frac{\partial^3 a_{ij}}{\partial x_s \partial x_r \partial x_h} + \frac{\partial^3 a_{js}}{\partial x_i \partial x_r \partial x_h} = 0, \qquad (sij)$$

$$\frac{\partial^3 a_{hi}}{\partial x_j \partial x_r \partial x_s} + \frac{\partial^3 a_{ij}}{\partial x_h \partial x_r \partial x_s} + \frac{\partial^3 a_{jh}}{\partial x_i \partial x_r \partial x_s} = 0. \qquad (hij)$$

Per semplicità abbiamo contrassegnato queste dieci equazioni cogl' indici, che ha la lettera a in ciascuna d' esse.

Sommando e dividendo per 3, si ottiene:

$$\frac{\partial^3 a_{rs}}{\partial x_h \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{rh}}{\partial x_s \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{sh}}{\partial x_r \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{ri}}{\partial x_s \partial x_h \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{si}}{\partial x_r \partial x_h \partial x_j}$$

$$+ \frac{\partial^3 a_{hi}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{rj}}{\partial x_s \partial x_h \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{sj}}{\partial x_r \partial x_h \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{hj}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{ij}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_h} = 0 .$$

Sommando l' equazioni (rsh), (rsi), (rhi), (shi) e dividendo per 2, si ha:

$$\frac{\partial^3 a_{rs}}{\partial x_h \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{rh}}{\partial x_s \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{sh}}{\partial x_r \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{ri}}{\partial x_s \partial x_h \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{si}}{\partial x_r \partial x_h \partial x_j}$$

$$+ \frac{\partial^3 a_{hi}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_j} = 0 .$$

Sottraendo quest' equazione dalla precedente, membro a membro, risulta:

$$\frac{\partial^3 a_{rj}}{\partial x_s \partial x_h \partial x_i} + \frac{d^3 a_{sj}}{\partial x_r \partial x_h \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{hj}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{ij}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_h} = 0 .$$

Sommando l' equazioni (rsj), (rhj), (shj), si ha:

$$\frac{\partial^3 a_{rs}}{\partial x_h \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 a_{rh}}{\partial x_s \partial x_i \partial r_j} + \frac{\partial^3 a_{sh}}{\partial x_r \partial x_i \partial x_j} + 2 \frac{\partial^3 a_{jr}}{\partial x_s \partial x_h \partial x_i} + 2 \frac{\partial^3 a_{hj}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_i}$$

$$+ 2 \frac{\partial^3 a_{sj}}{\partial x_r \partial x_i \partial x_h} = 0 .$$

Da questa sottraendo (rsh), membro a membro, e dividendo per 2, si trae:

$$\frac{\partial^3 a_{sj}}{\partial x_r \partial x_h \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{jr}}{\partial x_s \partial x_h \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{hj}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_i} = 0 .$$

Sottraendo questa dall' antipenultima, si ottiene:

$$\frac{\partial^3 a_{ij}}{\partial x_r \partial x_s \partial x_h} = 0 ,$$

da cui risulta che le quantità a_{ij} sono polinomi razionali interi di secondo grado rispetto a x_1, x_2, ... x_n.

Il caso, in cui n è uguale ad n', essendo $n' < 5$, si può considerare come contenuto nel caso generale, in cui sia $n = m$, essendo m non minore di 5. Basta per questo immaginare che gl'indici delle quantità x_r, a_{rs} possano prendere anche i valori maggiori di n' e non maggiori di m, purchè le nuove quantità a_{rs}, che così s' introducono, si suppongano identicamente nulle, e le antiche quantità a_{rs} si considerino indipendenti dalle nuove variabili x_s, i cui indici siano maggiori di n' e non maggiori di m. È evidente che, se nella relazione (I, 3) a qualcuno degl' indici si attribuisce un valore maggiore di n', e non maggiore di m, ogni termine della stessa relazione sarà identicamente nullo. Perciò fra tutte le quantità a_{rs}, in cui r, s siano due numeri eguali o disuguali della serie 1, 2, ... m, sussisteranno le relazioni (I, 3), e quindi anche tutte le relazioni del presente paragrafo, sicchè si conclude che, anche se $n < 5$, le quantità a_{rs} sono polinomi razionali interi di secondo grado rispetto a x_1, x_2, ... x_n.

§ III.

Dalle (I, 3, 4) si deduce facilmente che anche le quantità c_r sono, rispetto alle x_s, polinomi razionali interi di secondo grado. Infatti derivando le (I, 3, 4), si ha:

$$\frac{\partial^3 c_r}{\partial x_s\, \partial x^h\, \partial x_i} + \frac{\partial^3 c_s}{\partial x_r\, \partial x_h\, \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{rs}}{\partial t\; d x_h\, \partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 c_r}{\partial x_h\, \partial x_s\, \partial x_i} + \frac{\partial^3 c_h}{\partial x_r\, \partial x_s\, \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{rh}}{\partial t\; \partial x_s\, \partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 c_s}{\partial x_h\, \partial x_r\, \partial x_i} + \frac{\partial^3 c_h}{\partial x_s\, \partial x_r\, \partial x_i} + \frac{\partial^6 a_{sh}}{\partial t\; \partial x_r\, \partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 a_{rs}}{\partial t\; \partial x_h\, \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{sh}}{\partial t\; \partial x_r\, \partial x_i} + \frac{\partial^3 a_{hr}}{\partial t\; \partial x_s\, \partial x_i} = 0.$$

Sommando le prime tre, quindi dall' equazione risultante sottraendo la quarta, e poi dividendo per 2, si ottiene :

$$\frac{\partial^3 c_r}{\partial x_s \partial x_h \partial x_i} + \frac{\partial^3 c_s}{\partial x_r \partial x_h \partial x_i} + \frac{\partial^3 c_h}{\partial x_r \partial x \, \partial x_i} = 0 .$$

Analogamente :

$$\frac{\partial^3 c_r}{\partial x_s \partial x_i \partial x_h} + \frac{\partial^3 c_s}{\partial x_r \partial x_i \partial x_h} + \frac{\partial^3 c_i}{\partial x_r \partial x_s \partial x_h} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^3 c_r}{\partial x_h \partial x_i \partial x_s} + \frac{\partial^3 c_h}{\partial x_i \partial x_r \partial x_s} + \frac{\partial^3 c_i}{\partial x_r \partial x_h \partial x_s} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^3 c_s}{\partial x_h \partial x_i \partial x_r} + \frac{\partial^3 c_h}{\partial x_s \partial x_i \partial x_r} + \frac{\partial^3 c_i}{\partial x_s \partial x_h \partial x_r} = 0 .$$

Sommando le ultime quattro equazioni, membro a membro, dividendo per 3 e dal risultato sottraendo l' ultima, si ha :

$$\frac{\partial^3 c_r}{\partial x_s \partial x_h \partial x_i} = 0 ,$$

dove ciascuno degl' indici r, s, h, i può prendere uno qualunque dei valori 1, 2, ... n.

§ IV.

Da ciò che precede, risulta che le quantità a_{rs}, c_r sono polinomi razionali interi di secondo grado rispetto a x_1, x_2, ... x_n, e che i coefficienti di siffatti polinomi sono funzioni esplicite del tempo. Determiniamo ora le relazioni che esistono fra questi coefficienti.

Se poniamo :

$$a_{rs} = a_{rs}^{11} x_1^2 + \ldots + a_{rs}^{nn} x_n^2 + 2 a_{rs}^{12} x_1 x_2 + \ldots + 2 a_{rs}^{n-1,n} x_{n-1} x_n$$
$$+ 2 \alpha_{rs}^{1} x_1 + \ldots + 2 \alpha_{rs}^{n} x_n + 2 A_{rs} , \qquad (1)$$

$$c_r = c_r^{11} x_1^2 + \ldots + c_r^{nn} x_n^2 + 2 c_r^{12} x_1 x_2 + \ldots + 2 c_r^{n-1,n} x_{n-1} x_n$$
$$+ 2 \gamma_r^{1} x_1 + \ldots + 2 \gamma_r^{n} x_n + 2 C_r , \qquad (2)$$

avremo:

$$\frac{\partial a_{rs}}{dx_h} = 2\left(a_{rs}^{h1}\, x_1 + a_{rs}^{h2}\, x_2 + \ldots + a_{rs}^{hn}\, x_n + \alpha_{rs}^{h}\right),$$

$$\frac{\partial a_{sh}}{\partial x_r} = 2\left(a_{sh}^{r1}\, x_1 + a_{sh}^{r2}\, x_2 + \ldots + a_{sh}^{rn}\, x_n + \alpha_{sh}^{r}\right),$$

$$\frac{\partial a_{hr}}{dx_s} = 2\left(a_{hr}^{s1}\, x_1 + a_{hr}^{s2}\, x_2 + \ldots + a_{hr}^{sn}\, x_n + \alpha_{hr}^{s}\right),$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial x_s} = 2\left(c_r^{s1}\, x_1 + c_r^{s2}\, x_2 + \ldots + c_r^{sn}\, x_n + \gamma_r^{s}\right),$$

$$\frac{\partial c_s}{\partial x_r} = 2\left(c_s^{r1}\, x_1 + c_s^{r2}\, x_2 + \ldots + c_s^{rn}\, x_n + \gamma_s^{r}\right),$$

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial t} = \frac{da_{rs}^{11}}{dt}\, x_1^2 + \frac{da_{rs}^{22}}{dt}\, x_2^2 + \ldots + 2\,\frac{da_{rs}^{12}}{dt}\, x_1\, x_2 + 2\,\frac{da_{rs}^{13}}{dt}\, x_1\, x_3$$

$$+ \ldots + 2\,\frac{d\alpha^1_{rs}}{dt}\, x_1 + 2\,\frac{d\alpha^2_{rs}}{dt}\, x_2 + \ldots + 2\,\frac{dA_{rs}}{dt}\,.$$

Sostituendo quest' espressioni nelle (I, 3, 4), queste devono risultare identicamente soddisfatte. Perciò, uguagliando a zero, nell' equazioni che ne risultano, i coefficienti dei termini di primo e secondo grado rispetto alle x_s e la somma dei termini indipendenti da queste quantità, si hanno le seguenti relazioni fra i coefficienti dei polinomi a_{rs}, c_r:

$$a_{rs}^{hi} + a_{sh}^{ri} + a_{hr}^{si} = 0\,, \tag{3}$$

$$\alpha_{rs}^{h} + \alpha_{sh}^{r} + \alpha_{hr}^{s} = 0\,, \tag{4}$$

$$\frac{da_{rs}^{ij}}{dt} = 0\,, \tag{5}$$

$$c_r^{si} + c_s^{ri} + \frac{d\alpha_{rs}^{i}}{dt} = 0\,, \tag{6}$$

$$\gamma_r^{s} + \gamma_s^{r} + \frac{dA_{rs}}{dt} = 0\,. \tag{7}$$

Si soddisfa quindi nel modo più generale all'equazioni (I, 3, 4), assumendo per le a_{rs}, c_r l'espressioni (1), (2), i cui coefficienti soddisfino a quest'ultime equazioni.

§ V.

Tra le forme particolari d'integrali, contenuti nell'equazione generale (I, 2), consideriamo prima separatamente il caso, in cui quest'equazione si riduca al primo grado rispetto a x_1', x'_2, ... x_n'. Allora i coefficienti dei polinomi a_{rs} sono identicamente nulli, cioè si ha in tal caso:

$$a_{rs}^{hi} = \alpha_{rs}^{h} = A_{rs} = 0, \tag{1}$$

e i coefficienti dei polinomi c_r dovranno soddisfare all'equazioni:

$$c_r^{si} + c_s^{ri} = 0, \tag{2}$$

$$\gamma_r^s + \gamma_s^r = 0. \tag{3}$$

Insieme all'equazioni (2) sussisteranno evidentemente l'equazioni:

$$c_s^{ir} + c_i^{sr} = 0, \qquad c_i^{rs} + c_r^{is} = 0,$$

le quali, osservando che in generale è $c_r^{si} = c_r^{is}$, sommate colla (1), danno:

$$c_r^{si} + c_s^{ri} + c_i^{rs} = 0,$$

e perciò in virtù della (2)

$$c_i^{rs} = 0. \tag{4}$$

Dunque: *Nel moto d'un sistema materiale di punti, se le componenti generali delle forze siano funzioni delle coordinate generali del sistema e funzioni esplicite del tempo, ma non siano funzioni delle de-*

rivate delle coordinate generali, un integrale di primo grado rispetto alle derivate delle coordinate generali è altresì di primo grado rispetto alle coordinate generali.

Essendo le quantità a_{rh} identicamente nulle, l'equazioni (I, 6), nel presente caso, divengono:

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x_s} . \qquad (s = 1, 2, \dots n) \tag{5}$$

Queste non possono essere identicamente soddisfatte, a meno che non si abbia:

$$\frac{\partial^2 c_r}{\partial t \partial x_s} = \frac{\partial^2 c_s}{\partial t \partial x_r},$$

ossia, per (IV, 2), (4):

$$\frac{\partial \gamma_r^s}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_s^r}{\partial t} .$$

Tenendo conto di (3), si ha perciò:

$$\frac{\partial \gamma_r^s}{\partial t} = 0, \tag{6}$$

cioè le quantità γ_r^s sono costanti. La (3) stessa, sussistendo per $r = s$, offre:

$$\gamma_r^r = 0.$$

Le (5), per (IV, 2), (4), (6), divengono:

$$\frac{\partial F}{\partial x_s} = 2 \frac{dC_s}{dt},$$

onde integrando:

$$F = 2 \left[\frac{dC_1}{dt} x_1 + \dots + \frac{dC_n}{dt} x_n + g(t) \right], \tag{7}$$

essendo $g(t)$ una funzione arbitraria di t. Avendo dunque riguardo alle relazioni (1), (3), (4), (6), (7), che si hanno nel presente caso, e alla (IV, 2), e ponendo:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{2},$$

la (I, 2) diviene:

$$\Sigma \gamma_s^r (x_r x'_s - x'_r x_s) + \Sigma C_r x'_r = \Sigma \frac{dC_r}{dt} x_r + g(t) + \alpha_1. \qquad (8)$$

Quest'equazione, nella quale le quantità γ_s^r sono costanti, le C_r, $g(t)$ sono funzioni qualunque di t, e α_1 è costante arbitraria, costituisce un integrale primo del problema, ogni qual volta le componenti generali delle forze soddisfino all'equazione di condizione:

$$\Sigma \gamma_s^r (x_r X_s - x_s X_r) + \Sigma C_r X_r = \Sigma \frac{d^2 C_r}{dt^2} x_r + \frac{dg}{dt}. \qquad (9)$$

L'equazione (8) rappresenta l'integrale primo più generale di primo grado rispetto alle derivate delle coordinate generali, che possa convenire a un problema del moto d'un sistema, nell'ipotesi che le componenti generali delle forze siano funzioni delle coordinate generali del sistema, e possano contenere il tempo anche esplicitamente.

§ VI.

Se le componenti generali delle forze, invece di essere funzioni delle sole coordinate generali, sono altresì funzioni delle derivate di queste coordinate rispetto al tempo, può avvenire che la (V, 9) sia nondimeno identicamente soddisfatta, qualunque siano i valori $x_1, x_2, \dots x_n, x_1', \dots . x_n', t$. Quando ciò avvenga, l'equazione (V, 8) è evidentemente un integrale del problema.

Nell'equazioni (I, 1) si ha:

$$X_s = b_s + \sum_{r=1}^{r=n} B_{r,s} M_r$$

Qui le quantità b_s, $B_{r,s}$ sono determinate, appena che si conoscano i vincoli del sistema, e non dipendono dalle componenti, secondo gli assi, delle forze, che sollecitano i punti del sistema, mentre le quantità M_r contengono linearmente queste stesse componenti. Le quantità $B_{r,s}$ sono funzioni di $x_1, x_2, \dots x_n, t$, e le b_s sono funzioni intere di secondo grado rispetto alle quantità $x_1', x_2', \dots x'_n$ con coefficienti funzioni di $x_1, x_2, \dots x_n, t$. Se i legami del sistema sono indipendenti dal tempo, le $B_{r,s}$, b_s, com' è noto, non contengono esplicitamente il tempo, e inoltre b_s è omogenea rispetto alle quantità x'_1, x'_2, ... x'_n.

Risulta da ciò che ogni relazione lineare rispetto alle componenti generali delle forze, p. es. la condizione (V, 9), si può trasformare in un'equazione lineare rispetto alle quantità $M_1, M_2, \dots M_n$, o, se si vuole, rispetto alle componenti, secondo gli assi, delle forze applicate ai singoli punti del sistema.

§ VII.

Ritornando agl'integrali di secondo grado, contenuti nell'equazione generale (I, 2), aggiungiamo all' ipotesi del § I quest' altra ipotesi, che cioè essi non contengano esplicitamente il tempo. Consideriamo cioè il caso particolare che il tempo non figuri esplicitamente nè nei coefficienti dei polinomi a_{rs}, c_r (IV, 1, 2), nè nella funzione F. Saranno allora costanti non solo le quantità a_{rs}^{ij}, secondo (IV, 5), ma altresì le quantità α_{rs}^{h}, A_{rs}, c_r^{ij}, γ_r^i, C_r. Se, in quest'ipotesi, l'equazione (1) è un integrale del problema, si deduce dalle (I, 3-6) che esso è la somma dei seguenti due integrali dello stesso problema, l' uno di secondo, l' altro di primo grado rispetto alle coordinate generali del sistema:

$$\frac{1}{2}\left(a_{11} x_1'^2 + a_{22} x_2'^2 + \dots + 2a_{12} x'_1 x'_2 + \dots + 2a_{n-1,n} x'_{n-1} x'_n\right) = F(x_1, x_2, \dots x_n) + \beta, \tag{1}$$

$$c_1 x'_1 + c_2 x'_2 + \dots + c_n x'_n = \gamma. \tag{2}$$

Qui β e γ sono costanti tali che si abbia:

$$\beta + \gamma = \alpha.$$

Tenendo ferme le stesse ipotesi, l'equazione (I, 2) è dunque un integrale del problema, sol quando sieno soddisfatte a un tempo tanto le condizioni, che sono necessarie e sufficienti, affinchè la (1) sia integrale di quel problema, quanto quelle necessarie e sufficienti affinchè la (2) sia integrale dello stesso problema.

Per quanto abbiamo veduto nel paragrafo precedente, l'equazione (2) non può essere integrale primo del problema, a meno che non abbia la forma seguente:

$$\Sigma \gamma_s^r (x_r x'_s - x'_r x_s) + \Sigma C_r x'_r = \gamma, \tag{3}$$

essendo γ_s^r, C_r costanti qualunque. La (3) si deduce dalla (V, 8), supponendo costanti le quantità C_r, g. La condizione necessaria e sufficiente, affinchè la (3) sia un integrale primo del problema, è che fra le componenti generali delle forze sussista la relazione lineare omogenea:

$$\Sigma \gamma_s^r (x_r X_s - x_s X_r) + \Sigma C_r X_r = 0. \tag{4}$$

Le condizioni, perchè l'equazione (1) sia integrale d'un problema, sono che i coefficienti dei polinomi a_{rs}, di secondo grado rispetto alle x_s, soddisfino alle $\frac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$ condizioni (IV, 3), alle $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ condizioni (IV, 4), e che inoltre le componenti generali delle forze sieno tali, che l'espressione:

$$(a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n) dx_1 + \ldots + (a_{n1} X_1 + \ldots + a_{nn} X_n) dx_n \tag{5}$$

sia il differenziale esatto della funzione $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Siccome il numero totale dei coefficienti (supposti tutti differenti da zero e indipendenti) degli $\frac{n(n+1)}{2}$ polinomi completi a_{rs}, di

secondo grado rispetto alle n variabili x_s, è $\frac{(n+1)(n+2)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$, così, detto N il numero delle costanti indipendenti, che figurano nell'integrale (1), quando F sia una funzione data, e non si computino fra queste costanti nè quelle, che possono essere contenute in F, nè la costante arbitraria β, si ha:

$$N = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{4} - \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

Osserveremo infine che, nella stessa ipotesi riguardo ai coefficienti dell' equazione (1), e ammettendo inoltre però che le componenti generali X_s delle forze possano essere funzioni anche delle $x'_1, x'_2, \ldots x'_n, t$, la predetta equazione è un integrale del problema più generalmente, ogni qual volta le quantità X_s, considerate come funzioni delle variabili indipendenti $x_1, \ldots x_n, x'_1, \ldots x'_n, t$, soddisfino identicamente all' unica equazione:

$$(a_{11} X_1 + \ldots + a_{1n} X_n) x'_1 + \ldots + (a_{n1} X_1 + \ldots + a_{nn} X_n) x'_n$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x_1} x'_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} x'_n .$$

Nelle stesse ipotesi precedenti riguardo ai polinomi a_{rs}, e senza supporre che il problema ammetta l'integrale (1), e se inoltre le quantità $x_1, x_2, \ldots x_n, x'_1, \ldots x'_n$, in virtù dell'equazioni integrali, si considerano come funzioni dell'unica variabile indipendente t, si ha:

$$dU = (a_{11} X_1 + \ldots + a_{1n} X_n) + \ldots + (a_{n1} X_1 + \ldots + a_{nn} X_n) dx_n;$$

onde, indicando con U_0 il valore di U per $t = t_0$:

$$U - U_0 = \int_{t_0}^{t} \{ (a_{11} X_1 + \ldots + a_{1n} X_n) dx_1 + \ldots + (a_{n1} X_1 + \ldots + a_{nn} X_n) dx_n \}.$$

§. VIII.

Nel caso generale, dati i polinomi a_{rs}, c_r, tra i cui coefficienti a_{rs}^{hi}, α_{rs}^{h}, A_{rs}, C_r^{si}, γ_r^{s}, supposti funzioni del tempo, sussistano le rela-

zioni (IV, 3-7), le n componenti generali X_r delle forze dovranno soddisfare alle $n+1$ equazioni lineari (I, 5, 6), affinchè il problema ammetta l' integrale (I, 2). Affinchè queste $n+1$ equazioni coesistano, deve essere nullo il determinante d' ordine $n+1$ formato coi coefficienti delle quantità $X_1, X_2, \ldots X_n$ e coi secondi membri delle stesse equazioni, cioè si deve avere:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial c_1}{\partial t}, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} - \frac{\partial c_n}{\partial t}, & a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots a_{nn} \\ \frac{\partial F}{\partial t}, & c_1, & c_2, & \ldots c_n \end{vmatrix} = 0.$$

Quest' equazione contiene le derivate parziali della funzione F delle $n+1$ variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots x_n, t$, è lineare, e, se i coefficienti delle derivate parziali non sono tutti identicamente nulli, serve alla determinazione della funzione F. Determinata F, la condizione per le forze è che l' espressione:

$$(a_{11} X_1 + \ldots + a_{1n} X_n)\, dx_1 + \ldots + (a_{n1} X_1 + \ldots + a_{nn} X_n)\, dx_n + (c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n)\, dt$$

sia il differenziale esatto di F, considerata come funzione delle $n+1$ variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots x_n, t$.

§ IX.

Non sarà inutile aggiungere qui la seguente osservazione. Se il sistema si compone di i punti materiali $m_1, m_2, \ldots m_i$, ed è $n=3i$, le equazioni (I, 1) e le conclusioni, a cui siamo giunti nei paragrafi precedenti, possono ricevere, nel caso d'un sistema vincolato, anche un' altra interpretazione. Dapprima si può supporre che in questo caso, come nell'ipotesi d'un sistema libero, $x_1, x_2, \ldots x_n$, sieno le $3i$ coordinate degli i punti rispetto a tre assi ortogonali fissi nello

spazio. Di poi immaginiamo per ciascun punto m_k la forza attiva P_k che lo sollecita, la forza passiva S, che rappresenta l' azione del sistema sul punto m_k, e la risultante Q_k di queste due forze, cioè la forza effettiva, la quale, agendo sola sul punto, supposto questo liberato da ogni legame, basterebbe a comunicargli il moto che ha realmente. Posto ciò, noi possiamo supporre che X_1, X_2, ... X_n sieno le $3i$ componenti delle i forze Q_k, secondo gli assi, ciascuna divisa per la massa del punto, a cui la forza stessa è applicata.

Ora è evidente che quanto abbiamo dimostrato sugl' integrali primi di primo e secondo grado rispetto alle x'_s, continua a sussistere anche, quando alle quantità x_s, X_s si attribuisca quest'ultimo significato.

§ X.

Si consideri il moto d' un sistema libero di punti. Sieno X, Y, Z, L, M, N le somme della proiezioni delle forze sui tre assi e le somme dei momenti delle forze stesse rispetto agli assi; e sia m la massa di uno qualunque dei punti. Come caso particolare di (VII, 3, 4), si avrà che, quando tra le sei quantità X, Y, Z, L, M, N sussista una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti qualunque:

$$aX + bY + cZ + pL + qM + rN = 0,$$

il problema ammette l' integrale:

$$a\sum mx' + b\sum my' + c\sum mz' + p\sum(yz' - y'z) + q\sum(zx' - z'x) + r\sum(xy' - x'y) = \gamma,$$

che, per opportuna scelta delle costanti, fornisce gl' integrali primi delle aree e del moto del centro di gravità, e sul quale il Cerruti richiamò l'attenzione dei geometri e diede importanti teoremi.

Un esempio semplicissimo d'integrali di secondo grado è:

$$\frac{1}{2}\left(a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x'\right)$$
$$= g\left(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z\right) + \beta,$$

dove intendiamo che le quantità a_s ricevano valori dati qualunque, e che conviene al sistema dell' equazioni differenziali:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0\,, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \tag{1}$$

del moto libero d' un grave nel vuoto.

Il problema del moto libero di un punto ammette l' integrale:

$$\frac{1}{2} m^2 \left\{ (x y' - x' y)^2 + (yz' - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2 \right\} = F(x, y, z) + \beta, \tag{2}$$

(dove il primo membro è la metà del quadrato del momento della quantità di moto, rispetto all' origine d' un sistema di assi ortogonali x, y, z) ogni qualvolta siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$L_1 = \frac{\partial F}{\partial x}\,, \quad M_1 = \frac{\partial F}{\partial y}\,, \quad N_1 = \frac{\partial F}{\partial z}\,, \tag{3}$$

essendo:

$$L_1 = zM - yN,$$
$$M_1 = xN - zL\,,$$
$$N_1 = yL - xM,$$

ed essendo L, M, N i momenti della forza data rispetto agli assi. Se L, M, N si considerano come le componenti d'una forza fittizia G, avente lo stesso punto d' applicazione della forza data, saranno L_1, M_1, N_1, presi con segno opposto, i momenti di G rispetto agli assi coordinati. Conseguenza delle equazioni (3) è:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y + \frac{\partial F}{\partial z} z = 0,$$

da cui si deduce che la funzione F è omogenea di grado zero. Data quindi una funzione F, omogenea di grado zero, qualunque, le condizioni, a cui devono soddisfare le forze, affinchè il problema ammetta l' integrale precedente, sono espresse da due qualunque delle (3).

Se poi si esclude la condizione che la forza attiva, che sollecita il mobile, sia funzione delle sole coordinate x, y, z, ma si ammette che tal forza possa anche essere funzione di x', y', z', t, l' equazione (2) sarà integrale del problema, tutte le volte che L, M, N, considerate come funzioni delle variabili indipendenti x, y, z, x', y', z', t, soddisfino all' unica equazione:

$$L_1 x' + M_1 y' + N_1 z' = F(x, y, z),$$

e F potrà ora rappresentare una funzione qualunque delle tre variabili indipendenti x, y, z, anche cioè non omogenea di grado zero.

Eziandio poi quando il problema non ammetta l' integrale (2), si ha, secondo l' osservazione generale fatta in fine del § VII:

$$d\frac{1}{2}m^2 \left\{ (x y' - x' y)^2 + (y z' - y' z)^2 + (z x' - z' x)^2 \right\} = L_1 dx + M_1 dy + N_1 dz,$$

onde:

$$\frac{1}{2} m^2 \left\{ (x y' - x' y)^2 + (y z' - y' z)^2 + (z x' - z' x)^2 \right\}$$
$$- \frac{1}{2} m^2 \left\{ (x_0 y_0' - x'_0 y_0)^2 + (y_0 z'_0 - y'_0 z_0)^2 + (z_0 x'_0 - z'_0 x_0)^2 \right\}$$
$$= \int_{t_0}^{t} (L_1\, d\, x + M_1\, d\, y + N_1\, d\, z).$$

L' integrale del secondo membro di quest' equazione esprime il lavoro della forza fittizia G, che ha per componenti L_1, M_1, N_1.

Più generalmente il problema del moto libero d'un punto materiale ammette l' integrale:

$$\frac{1}{2} (a_{11} x'^2 + a_{22} y'^2 + a_{33} z'^2 + 2a_{12} x'y' + 2a_{23}\, y'z' + 2a_{31}\, z'x') = F(x, y, z) + \beta,$$

quando l' espressione differenziale:

$$(a_{11}\, X + a_{12}\, Y + a_{13}\, Z) dx + (a_{21}\, X + a_{22} Y + a_{23} Z) dy + (a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} Z) dz \quad (4)$$

sia il differenziale esatto della funzione F, e inoltre i polinomi a_{rs} abbiano la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= a_2 y^2 + a_1 z^2 + b_1 yz + c_2 y + d_3 z + c_1 , \\ a_{22} &= a_3 z^2 + a_1 x^2 + b_2 zx + c_3 z + d_1 x + c_2 , \\ a_{33} &= a_1 x^2 + a_3 y^2 + b_3 xy + c_1 x + d_2 y + c_3 , \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} 2a_{12} &= b_3 z^2 - 2a_2 xy - b_2 yz - b_1 xz - c_2 x - d_1 y + f_3 y + g_3 , \\ 2a_{23} &= b_1 x^2 - 2a_3 yz - b_3 zx - b_2 yx - c_3 y - d_2 z + f_1 z + g_1 , \\ 2a_{31} &= b_2 y^2 - 2a_1 zx - b_1 xy - b_3 zy - c_1 z - d_3 x + f_2 x + g_2 , \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

dove le tre costanti f_1, f_2, f_3 sono soggette alla condizione:

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0.$$

Tra le forme d' integrali, compresi nella equazione (I, 2) e relativi al problema del moto libero del sistema di i punti materiali, notiamo l'integrale:

$$U = F(x_1 ,\ y_1 ,\ z_1 ,\ x_2 , \dots z_n) + \beta , \quad (7)$$

dove:

$$U = \sum_{r=1}^{r=i} \frac{1}{2} \left(a_{11} x'^2_r + a_{22} y'^2_r + a_{33} z'^2_r + 2a_{12} x'_r y'_r + 2a_{23} y'_r z'_r + 2a_{31} z'_r x'_r \right) ,$$

essendo a_{11}, a_{22}, a_{12}, ... i polinomi precedenti, nei quali ad x, y, z si sostituiscano x_r, y_r, z_r.

Quest' integrale conviene al problema, quando l' espressione:

$$\sum \left\{ (a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} Z) dx + (a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} Z) dy + (a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} Z) dz \right\}$$

sia il differenziale esatto della funzione F.

§ XI.

Supponiamo che i polinomi a_{rs}, soddisfacenti alle condizioni (I, 3), non contengano esplicitamente il tempo.

Poniamo per brevità:

$$Y_i = a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \ldots + a_{in} X_n.$$

Una combinazione delle equazioni (I, 1) del moto sarà:

$$dU = Y_1\, dx_1 + Y_2\, dx_2 + \ldots + Y_n\, dx_n. \tag{1}$$

Perciò, senza supporre che il problema ammetta l'integrale (VII, 1), e considerando le x_s, x'_s, in virtù dell'equazioni integrali, come funzioni dell' unica variabile indipendente t, si ha, indicando con U_0 il valore di U corrispondente a $t = t_0$:

$$U - U_0 = \int_{t_0}^{t} (Y_1\, dx_1 + Y_2\, dx_2 + \ldots + Y_n\, dx_n). \tag{2}$$

Supponiamo che le X_s, e per conseguenza anche le y_s, siano funzioni delle sole variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$. Noi possiamo ora immaginare che le n quantità x_s siano le n coordinate di uno spazio S ad n dimensioni, e faremo uso delle definizioni e dei teoremi dati dal prof. Betti nella sua memoria: *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni* (1). Ciò premesso, noi considereremo soltanto quella parte R dello spazio S, nella quale tutte le X_s e le loro derivate prime, e per conseguenza tutte le Y_s e le loro derivate prime, si conservino finite e continue, e che si ottiene, escludendo nella maniera nota, con opportuni spazi a 2, 3, ... n — 1 dimensioni, gli spazi a 1, 2, ... n dimensioni, nei quali le X_s o le loro derivate prime non sieno finite e continue. Abbia lo spazio R la sua connessione di prima specie dell'ordine $p + 1$. Siano $s_1, s_2, \ldots s_p$ le sezioni trasverse di n — 1 dimensioni, semplicemente connesse, che rendono semplice la connessione di prima specie. Siano $L_1, L_2, \ldots L_p$ linee chiuse, in numero di p, che incontrano rispettiva-

(1) Annali di matematica diretti da F. Brioschi e L. Cremona, Serie II, T. III, pag. 140 - 158.

mente le sezioni $s_1, s_2, \ldots s_p$. Supponiamo che in tutto lo spazio R le funzioni Y soddisfacciano alle $\frac{n(n-1)}{2}$ condizioni:

$$\frac{\partial Y_r}{\partial x_s} - \frac{\partial Y_s}{\partial x_r} = 0.$$

Siano A_0, A'_0, A, A' configurazioni del sistema tali, che le coordinate delle prime due e delle ultime due soddisfino rispettivamente alle equazioni:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_0, \tag{3}$$

$$F(x'_1, x'_2, \ldots x_n) = a, \tag{4}$$

essendo a_0, a costanti date. Supponiamo pure che le x_s, x'_s soddisfino identicamente all' equazioni:

$$U = b_0, \qquad U = b$$

rispettivamente per le prime due e per le ultime due configurazioni. Indichiamo poi con U'_0, U' ciò che diventa U, quando invece delle x_s, x'_s vi si sostituiscano i valori, che prendono queste quantità nelle configurazioni A'_0, A'. Supponiamo che negli spazi (3). (4) ad $m-1$ dimensioni si possano condurre due linee $A_0 A'_0$; $A A'$, che passino, l'una pei due punti A_0, A'_0, l'altra pei due punti A, A' dello spazio R, e che sieno tali, che lungo ciascun punto di esse, tutte le X_s e le loro derivate prime siano finite e continue. Le equazioni integrali del moto del sistema da una configurazione B a un' altra configurazione qualunque C fanno conoscere le n coordinate generali x_s in funzione di t, e così determinano una linea BC nello spazio R. Ciò posto, si ha:

$$\int_{A_0A} \Sigma Y_r dx_r + \int_{AA'} \Sigma Y_r dx_r + \int_{A'A'_0} \Sigma Y_r dx_r + \int_{A'_0A_0} \Sigma Y_r dx_r$$
$$+ \sum \varepsilon_r \int_{L_r} Y_r dx_r = 0,$$

dove ε_r prende i valori 0, 1, —1, secondochè la sezione s_r non è incontrata, ovvero è incontrata progredendo in una o in altra direzione

della linea $A_0 A A' A'_0 A_0$. Ma evidentemente il secondo e il quarto degl'integrali del primo membro sono identicamente nulli, mentre il terzo è uguale e di segno contrario all'integrale $\int_{A'_0 A} \Sigma Y_r dx_r$. Perciò:

$$\int_{A'_0 A} \Sigma Y_r dx_r = \int_{A_0 A} \Sigma Y_r dx_r + \sum \varepsilon_r \int_{L_r} Y_r dx_r.$$

Onde:

$$U' - U_0' = U - U_0 + \sum \varepsilon_r \int_{L_r} Y_r dx_r.$$

Da ciò si deduce che l'aumento di U, nel passaggio del sistema dall'una all'altra di due configurazioni, le cui coordinate sodisfino rispettivamente alla (3) e alla (4), è costante, se la connessione di prima specie dello spazio R è semplice; ma non è, in generale, costante, se questa connessione non è semplice, potendo, in quest'ultimo caso, tale aumento, da due cammini a due altri, differire di multipli di p quantità costanti.

§ XII.

Se U e la forza viva T si esprimono per mezzo delle stesse coordinate generali $x_1, x_2, \ldots x_n$ e delle loro derivate $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ rispetto al tempo, si vede che, mentre i coefficienti dei quadrati e dei prodotti di $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$, due a due, sono in U polinomi di secondo grado rispetto a $x_1, x_2, \ldots x_n$, in T i coefficienti potranno essere di forme svariatissime, a seconda dei legami del sistema e dello scelto sistema di coordinate generali, sicchè le due espressioni saranno, in generale, distintissime l'una dall'altra, com'è mostrato anche dagli esempi del paragrafo precedente; e inoltre l'espressione di U sarà molto particolare rispetto all'espressione, che può generalmente assumere T. Gli stessi esempi dati mostrano tuttavia che in alcuni casi l'espressione di U può essere più generale dell'espressione di T. Ciò avviene, p. es., nel problema del moto di un sistema di punti liberi nello spazio, quando U e T si esprimono

per mezzo delle coordinate cartesiane ortogonali dei punti mobili e per mezzo delle derivate delle stesse coordinate rispetto al tempo. In particolare nel problema del moto d'un solo punto materiale, immaginando che x, y, z siano le coordinate cartesiane ortogonali del mobile, e supponendo che i polinomi (X, 5) si riducano ai loro termini costanti, e che questi sieno eguali alla massa del mobile: supponendo inoltre che i tre polinomi (X, 6) sieno identicamente nulli, l'equazione:

$$U - F = \beta$$

diventerà identica all'equazione:

$$T - F = \beta.$$

L'equazione:

$$T - F(x_1, x_2, \dots x_n) = \beta,$$

ha però, com'è noto, eziandio quando non sia un caso particolare dell'equazione:

$$U - F(x_1, x_2, \dots x_n) = \beta,$$

pure quest'altra ben nota e importantissima proprietà, che cioè, se essa è integrale primo del moto d'un sistema dato, o libero o a vincoli indipendenti dal tempo, e sotto l'azione di forze, le cui componenti secondo i tre assi siano date funzioni delle sole variabili x_1, $x_2, \dots x_n$, o anche di x'_1, $x'_2, \dots x'_n$, t, conviene pure se, conservando le stesse espressioni per le forze, si aggiunga al sistema quel numero di vincoli indipendenti dal tempo, che è compatibile col grado di libertà del sistema stesso.

§ XIII.

Supponiamo d'ora innanzi che i polinomi a_{rs} si riducano a costanti date.

Siano:

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = X_s \qquad (s = 1, 2, \dots n) \tag{1}$$

le equazioni del moto, e supponiamo che si abbia:

$$a_{s1} X_1 + a_{s2} X_2 + \dots + a_{sn} X_n = \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots x_n, t)}{\partial x_s}, \tag{2}$$

essendo F una funzione data di $x_1, x_2, \dots x_n, t$. Supponiamo inoltre che il determinante simmetrico D d'ordine n, formato coi coefficienti delle quantità $X_1, X_2, \dots X_n$ nei primi membri delle n equazioni (2), non sia nullo.

Pongo:

$$V = \frac{1}{2}(a_{11} x'^2_1 + \dots + 2a_{12} x'_1 x'_2 + \dots + 2c_1 x'_1 + \dots + 2c_n x'_n) \tag{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x'_s} = p_s . \tag{4}$$

Poichè D non è nullo, le espressioni delle x'_s in funzione delle p_s sono le derivate di una stessa funzione u definita dalla relazione:

$$u = -V + x'_1 p_1 + x'_2 p_2 + \dots + x'_n p_n + c, \tag{5}$$

essendo c una costante arbitraria, e intendendo che il secondo membro di quest' ultima eguaglianza sia espresso per mezzo delle p_s mediante le (4). Si ha perciò:

$$x'_s = \frac{\partial u}{\partial p_s} \tag{6}$$

Pongo:

$$U = \frac{1}{2}(a_{11} x'^2_1 + \dots + 2a_{12} x'_1 x'_2 + \dots + 2a_{n-1,n} x'_{n-1} x'_n)$$

$$U_1 = c_1 x'_1 + c_2 x'_2 + \dots + c_n x'_n ,$$

sicchè :

$$V = U + U_1.$$

La (5) diviene perciò :

$$u = - U - U_1 + x'_1 \frac{\partial U}{\partial x'_1} + x'_2 \frac{\partial U}{\partial x'_2} + \dots + x'_1 \frac{\partial U_1}{\partial x'_1} + x'_2 \frac{\partial U}{\partial x'_2} + \dots + c ,$$

ossia, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee :

$$u = - U - U_1 + 2U + U_1 + c ,$$

cioè :

$$u = U + c ,$$

dove U si deve intendere espresso in funzione delle p_s mediante le n relazioni (4), che legano le x'_s alle p_s.
Le (6) divengono perciò :

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p_s} .$$

Dalle (4), in virtù delle (1), (2), si trae :

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i} .$$

Ponendo :

$$U - F = H ,$$

e osservando che U è funzione delle sole variabili indipendenti p_s, mentre F è funzione delle sole variabili indipendenti x_s, si ha il seguente sistema di equazioni canoniche :

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_s} , \\ \frac{dp_s}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial x_s} . \end{aligned} \qquad (7)$$

Così ogni qual volta l'espressione:

$$(a_{11}\,X_1 + \ldots + a_{1n}X_n)\,dx_1 + \ldots + (a_{n1}\,X_1 + \ldots + a_{nn}\,X_n)\,dx_n$$

sia il differenziale esatto di una funzione F delle variabili indipendenti t, x_1, x_2, ... x_n, l' equazioni del moto si possono ridurre in infiniti modi alla forma canonica, potendosi attribuire alle costanti c_1, c_2, ... c_n valori particolari qualunque.

Se F non contiene il tempo esplicitamente, il problema ammette, come si è veduto al § VII, l' integrale:

$$U - F = \beta \quad \text{ossia} \quad H = \beta.$$

D' altronde si sa che il sistema canonico (7), in cui H sia una funzione data qualunque, ammette o no l' integrale $H =$ costante, secondochè H non contiene o contiene esplicitamente il tempo.

§ XIV.

Si formi l' equazione differenziale parziale di prim' ordine:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n,\ \frac{\partial S}{\partial x_1},\ \frac{\partial S}{\partial x_2},\ \ldots\ \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1}$$

dove il secondo termine del primo membro è ciò che diviene la funzione H, quando, invece di p_1, p_2, ... p_n, vi si sostituiscano rispettivamente $\frac{\partial S}{\partial x_1}$, $\frac{\partial S}{\partial x_2}$, ... $\frac{\partial S}{\partial x_n}$. Sia S una soluzione completa di quest' equazione, contenente cioè, oltre una costante additiva arbitraria, altre n costanti α_1, α_2, ... α_n. I $2n$ integrali delle equazioni del moto saranno:

$$\frac{\partial S}{\partial x_s} = p_s, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_s} = \beta_s,$$

essendo β_1, β_2, ... β_n nuove costanti arbitrarie.

Se F non contiene esplicitamente il tempo, lo stesso è di H, ed allora ponendo:

$$S = -ht + S_1,$$

dove h è una costante arbitraria, e S_1 è una funzione di $x_1, x_2, \dots x_n$, non contenente esplicitamente il tempo, la integrazione del sistema canonico dipende dalla determinazione di una soluzione completa S_1 dell' equazione:

$$H\left(x_1, x_2, \dots x_n, \frac{\partial S_1}{\partial x_1}, \frac{\partial S_1}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial S_1}{\partial x_n}\right) = h,$$

cioè di una soluzione contenente, oltre una costante additiva arbitraria, altre $n-1$ costanti arbitrarie $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$. Gl' integrali del sistema canonico sono in questo caso:

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_s} = p_s, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_r} = \beta_r, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial h} = \beta_n + t, \qquad \begin{array}{l} s = 1, 2, \dots n \\ r = 1, 2, \dots n-1 \end{array}$$

essendo $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ costanti arbitrarie.

Risolvendo il sistema di queste $2n$ equazioni rispetto alle costanti, si può agl' integrali dare la forma seguente:

$$\alpha_s = f_s(x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n), \qquad s = 1, 2, \dots n$$

$$\beta_r = \varphi_r(x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n), \qquad r = 1, 2, \dots n-1$$

$$\beta_n + t = \varphi_n(x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n),$$

contenendo così ciascun integrale una sola costante arbitraria. Continuando a supporre che F non contenga esplicitamente il tempo, si verificano immediatamente le seguenti due proposizioni:

1° Se $\gamma = C$ è un integrale, contenente una sola costante arbitraria C e non contenente esplicitamente il tempo, e distinto inoltre dall' integrale $U - F = \beta$, si avrà:

$$(\gamma, U - F) = 0.$$

Qui si è fatto uso della notazione di Poisson:

$$(\varphi, \psi) = \Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \frac{\partial \psi}{\partial p_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial \psi}{\partial x_s} \right),$$

essendo φ, ψ funzioni delle variabili $x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n$.

2° Se $\delta = t + C'$ è un integrale, contenente esplicitamente il tempo e contenente la sola costante arbitraria C', si ha:

$$(\delta, U - F) = 1.$$

Dalle note proprietà dei sistemi di Hamilton risulta, se F non contiene esplicitamente t, che, dato un integrale qualunque $\gamma_1 = C_1$, non contenente esplicitamente il tempo e distinto dall' integrale $H - F = \beta$, il sistema dei $2n$ integrali del problema si può immaginare composto:

1° Di $2n-2$ integrali:

$$\gamma_r = C_r, \qquad (r = 1, 2, \dots 2n-2)$$

i quali contengono le sole $2n-2$ costanti arbitrarie $C_1, C_2, \dots C_{2n-2}$, e non contengono esplicitamente il tempo, e siano tali che per ciascuno di essi si abbia:

$$(\gamma_1, \gamma_r) = 0;$$

2° D' un integrale:

$$\gamma_{2n-1} = C_{2n-1},$$

pure indipendente dal tempo, il quale contenga la sola costante arbitraria C_{2n-1}, e sia tale che si abbia:

$$(\gamma_1, \gamma_{2n-1}) = 1;$$

3° D' un integrale:

$$\gamma_{2n} = t + C_{2n},$$

il quale contenga la sola costante arbitraria C_{2n}, non contenga il tempo esplicitamente, se non aggiunto a questa costante, e sia inoltre tale che si abbia:

$$(\gamma_1, \gamma_{2n}) = 0.$$

§ XV.

Prendiamo la variazione dell' integrale $\int_{t_0}^{t} V dt$, essendo V definita dalla (XIII, 3). Ponendo per brevità:

$$x''_s = \frac{d^2 x_s}{dt^2},$$

si avrà:

$$\delta \int V dt = \Big[(a_{11} x'_1 + a_{12} x'_2 + \ldots + a_{1n} x'_n + c_1) \delta x_1 + \ldots \Big]_0^1$$

$$- \int_{t_0}^{t} \Big[(a_{11} x_1'' + a_{12} x_2'' + \ldots + a_{1n} x_n'') \delta x_1 + \ldots \Big] dt.$$

Perciò, se si pone:

$$\delta_1 F = (a_{11} X_1 + \ldots + a_{1n} X_n) \delta x_1 + \ldots + (a_{n1} X_1 + \ldots + a_{nn} X_n) \delta x_n,$$

si ha:

$$\int_{t_0}^{t} (\delta V + \delta_1 F) = \Big[(a_{11} x'_1 + \ldots + a_{1n} x'_n + c_1) \delta x_1 + \ldots \Big]_0^1$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Big[\{ a_{11} (X_1 - x_1'') + a_{12} (X_2 - x_2'') + \ldots \} \delta x_1 + \ldots \Big] dt.$$

Ma la quantità, che è sotto il segno integrale è nulla in virtù delle equazioni del moto; onde:

$$\int_{t_0}^{t} (\delta V + \delta_1 F) = p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 + \ldots + p_n \delta x_n - p_1^0 \partial x_1^0 - p_2^0 \partial x_2^0 - \ldots - p_n^0 \partial x_n^0.$$

Se supponiamo che si abbiano le (XIII, 2), è:

$$\delta_1 F = \delta F,$$

e la (1) diviene:

$$\delta \int_{t_0}^{t} (V + F) = p_1 \delta x_1 + \ldots + p_n \delta x_n - p_1^o \delta x_1^o - \ldots - p_n^o \delta x_n^o. \qquad (1)$$

Se le posizioni, iniziale e finale, del sistema, corrispondenti ai valori t_0, t del tempo, sono date fisse, quest'equazione diverrà:

$$\delta \int_{t_0}^{t} (V + F)\, dt = 0.$$

Se F non contiene esplicitamente il tempo, il problema ammette (cfr. § VII) l'integrale:

$$U - F = \beta;$$

onde:

$$\delta U = \delta F,$$

e si avrà:

$$\int_{t_0}^{t} \delta U dt = 0.$$

§ XVI.

Pongasi:

$$S = \int_{t_0}^{t} (U + F)\, dt. \qquad (1)$$

Ora per conoscere il significato del secondo membro di quest'equazione, si deve immaginare dapprima $U + F$, indi il secondo membro della stessa equazione, espressi mediante t e le $2n$ costanti arbitrarie, che figurano negl'integrali dell'equazione del moto. Possiamo supporre tali costanti essere x_1^0, x_2^0, ... x_n^0, $x_1'^0$, ... $x_n'^0$, o, in virtù delle (XIII, 6), possiamo fare che dette costanti siano x_1^0, ... x_n^0, p_1^0, ... p_n^0.

Ma le $2n$ equazioni integrali del moto permettono evidentemente di esprimere le medesime costanti per mezzo di $x_1, \dots x_n, x_1^0, \dots x_n^0$. Dunque S può esprimersi per mezzo di $t, x_1, \dots x_n, x_1^0, \dots x_n^0$. Onde:

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \dots + \frac{\partial S}{\partial x_1{}^0}\,\delta x_1{}^0 + \dots$$

Confrontando questa con (XV, 1), se ne deduce:

$$\frac{\partial S}{\partial x_s} = p_s\,, \qquad\qquad \frac{\partial S}{\partial x^0{}_s} = -\, p^0{}_s\,.$$

Il problema del moto è dunque ridotto alla determinazione di S in funzione di $t, x_1, \dots x_n, x_1^0, \dots x_n^0$. Ora si ha da (1):

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U + F.$$

Ma d'altra parte:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum \frac{\partial S}{\partial x_s}\, x_s{}'.$$

Perciò:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum \frac{\partial S}{\partial x_s}\, x_s{}' = U + F,$$

da cui:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U - F = 0\,,$$

cioè S soddisfa all'equazione differenziale (XIV, 1).

Catania 25 dicembre 1890.

Sopra sistemi di equazioni aventi analogia con quelli di Hamilton

Nota del prof. G. PENNACCHIETTI

letta all' Accademia Gioenia nell' adunanza del dì 25 gennaio 1891.

Sia dato il sistema di $2n$ equazioni differenziali ordinarie di prim' ordine della forma:

$$l\frac{dq_s}{dt}=\frac{\partial Z}{\partial p_s}, \qquad l\frac{dp_s}{dt}=-\frac{\partial Z}{\partial q_s}. \qquad (s=1,2,\ldots n)$$

In quest'equazioni t è la variabile indipendente, $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ sono funzioni incognite della variabile indipendente, Z è una funzione data qualunque di $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2 \ldots p_n$, la quale supponiamo non contenere esplicitamente la variabile indipendente, e l è una funzione qualunque, che non è identicamente nulla, e che può contenere, oltre le stesse quantità $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, anche la variabile indipendente. Il sistema è canonico, se l è uguale a $+1$, ovvero -1, i quali due casi rientrano manifestamente l'uno nell'altro, cambiando il segno di Z. I $2n-1$ integrali, che non contengono esplicitamente t, convengono inalterati al sistema precedente, qualunque sia la funzione l delle variabili t, q_s, p_s, e sono perciò comuni al sistema canonico:

$$\frac{dq_s}{dt}=\frac{\partial Z}{\partial p_s}, \qquad \frac{dp_s}{dt}=-\frac{\partial Z}{\partial q_s}.$$

Nella presente nota si vedrà, come possano modificarsi le dimostrazioni di teoremi fondamentali sui sistemi canonici, per stabilire

direttamente le principali proprietà dei sistemi più generali precedenti.

§ I.

La soluzione generale del sistema proposto:

$$l\frac{dq_s}{dt}=\frac{\partial Z}{\partial p_s}\,, \qquad l\frac{dp_s}{dt}=-\frac{\partial Z}{\partial q_s} \tag{1}$$

consiste nel sistema di $2n$ equazioni fra le $2n+1$ quantità $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n, t$ e $2n$ costanti arbitrarie $a_1, a_2, \dots a_{n-1}, h, b_1, b_2, \dots b_{n-1}, b_n$. Se, come già si è supposto di Z, nemmeno l contiene esplicitamente t, il sistema delle equazioni integrali si può porre sotto una forma tale, che una delle costanti, p. es. b_n, figuri in tutte le equazioni combinata con la variabile indipendente t per via di addizione. In tal caso, risolvendo il sistema dell' equazioni integrali rispetto alle costanti arbitrarie, possiamo anche immaginare che il sistema delle $2n$ equazioni integrali consista in $2n-1$ equazioni, che non contengano esplicitamente t, e in ciascuna delle quali figuri una distinta costante arbitraria, oltre un' equazione, che contenga esplicitamente t aggiunto ad una costante arbitraria.

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione:

$$F(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n, t) = \alpha, \tag{2}$$

il cui primo membro è una funzione data qualunque di $t, q_1, q_2, \dots q_n, p_1, \dots p_n$, e dove α è una costante arbitraria, sia un integrale del sistema (1), è che si abbia identicamente, in virtù del sistema stesso:

$$\frac{dF}{dt}=0\,,$$

cioè:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\sum\left(\frac{\partial F}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt}+\frac{\partial F}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt}\right)=0\,.$$

Sostituendo dunque per $\frac{dq_s}{dt}$, $\frac{dp_s}{dt}$ i loro valori tratti dalle (1), la condizione predetta è che si abbia identicamente:

$$l\frac{\partial F}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_s}\frac{\partial Z}{\partial p_s} - \frac{\partial F}{\partial p_s}\frac{\partial Z}{\partial q_s} \right) = 0 .$$

Questa condizione, ponendo con Poisson:

$$(F, Z) = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial q_s}\frac{\partial Z}{\partial p_s} - \frac{\partial F}{\partial p_s}\frac{\partial Z}{\partial q_s} \right),$$

è espressa dalla equazione:

$$l\frac{\partial F}{\partial t} + (F, Z) = 0 . \tag{3}$$

È facile ora vedere che l'equazione:

$$Z = h ,$$

essendo h una costante arbitraria, è un integrale del sistema (1). Infatti siccome Z, per ipotesi, non contiene esplicitamente t, si ha:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = 0 ;$$

inoltre è

$$(Z, Z) = 0 ,$$

sicchè, sostituendo Z invece di F nella (3), questa diviene identicamente soddisfatta.

§ II.

Supponiamo che l'equazione (I, 2) sia anche integrale del sistema:

$$l_1\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial p_s}, \quad l_1\frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial q_s}, \tag{1}$$

e che Z rappresenti la stessa funzione nei due sistemi (I, 1), (1), mentre l_1 sia una funzione qualunque di $t, q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$ distinta da l. Si dovrà avere identicamente:

$$l_1 \frac{\partial F}{\partial t} + (F, Z) = 0.$$

Da questa e dalla (I, 3), sottraendo, si ha:

$$(l - l_1) \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Ora il primo fattore del primo membro di quest'equazione per ipotesi è essenzialmente differente da zero; perciò si deve avere:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

$$(F, Z) = 0. \tag{3}$$

La (2) significa che una condizione necessaria, affinchè l'equazione (I, 2) sia integrale comune ai due sistemi (I, 1), (1), è che t non entri esplicitamente in F. Dunque: *L' integrale, che contiene esplicitamente la variabile indipendente, non può essere comune ai due sistemi* (I, 1), (1). La (3) esprime che gl'integrali comuni sono in numero di $2n-1$, e che essi sono le $2n-1$ soluzioni dell'equazione differenziale parziale di prim' ordine (3). Siccome poi, quando l'equazione:

$$F(q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n) = \alpha$$

è una soluzione comune ai due sistemi (I, 1), (1), la condizione (I, 3), a causa delle (2) e (3), è identicamente soddisfatta, qualunque sia l, così si conclude che, *data* Z, *i* 2n — 1 *integrali, che non contengono esplicitamente* t, *e che convengono al sistema* (I, 1) *per una particolare forma data di* l, *convengono allo stesso sistema per qualsivoglia altra forma data della funzione* l.

Prendendo $l = 1$, si conclude che *i $2n - 1$ integrali del sistema* (I, 1), *non contenenti esplicitamente la variabile indipendente, sono comuni anche al sistema di Hamilton:*

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial p_s}, \qquad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial q_s}. \tag{4}$$

Ciò posto, si formi l'equazione differenziale parziale di prim' ordine:

$$Z\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = h, \tag{5}$$

dove h denota una costante arbitraria, e dove il primo membro è ciò che diventa Z, quando invece di $p_1, p_2, \dots p_n$ vi si sostituiscano $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}$. Di quest' equazione differenziale sia V una soluzione completa, contenente cioè, oltre la costante additiva, altre $n-1$ costanti $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$, e siano $b_1, b_2, \dots b_{n-1}$ nuove costanti arbitrarie. I $2n-1$ integrali, non contenenti esplicitamente t, del sistema canonico (4) sono, com' è noto:

$$\frac{\partial V}{\partial a_r} = b_r, \qquad (r = 1, 2, \dots n - 1) \tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s, \qquad (s = 1, 2, \dots n) \tag{7}$$

i cui primi membri sono le derivate parziali della soluzione completa V, considerata come funzione delle quantità indipendenti $q_1, q_2, \dots q_n, a_1, a_2, \dots a_{n-1}, h$. Si ha perciò il teorema seguente: *Sia data l'equazione differenziale parziale di prim' ordine* (5). *Supponiamo che si conosca una soluzione completa V di questa equazione, e siano $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ le costanti arbitrarie, che, oltre la costante additiva, essa contiene. Le equazioni* (6), (7) *saranno i $2n - 1$ integrali, non contenenti esplicitamente* t, *e contenenti complessivamente $2n-1$ costanti arbitrarie $a_1, a_2, \dots a_{n-1}, h, b_1, b_2, \dots b_{n-1}$, del sistema delle $2n$ equazioni*

differenziali ordinarie di prim' ordine (I, 1) , *e converranno a questo sistema indipendentemente dall' espressione, che si assume per la funzione* l *delle quantità* $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2 \ldots p_n, t$. *L' integrale* $Z(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = h$ *del sistema* (I, 1) *è conseguenza degl' integrali* (7).

L' integrale contenente esplicitamente t, e che si riferisce a una forma particolare data di l, si determinerà nella seguente maniera. Si comincerà ad esprimere per mezzo dei $2n-1$ integrali, non contenenti esplicitamente t, tutte le p e le q, eccetto una di esse, p. es. la q_i ovvero la p_j, in funzione delle altre e delle $2n-1$ costanti $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, h, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$. Poi se ne sostituiranno i valori nell' equazione :

$$l \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial p_i},$$

ovvero nell' equazione :

$$l \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial Z}{\partial q_i}.$$

Per completare quindi la soluzione del problema non resterà che d' integrare un' equazione differenziale ordinaria di prim' ordine a due variabili q_i, t, ovvero p_j, t; anzi, se l non contiene esplicitamente t, basterà eseguire una quadratura. Con ciò s' introduce evidentemente una nuova costante arbitraria b_n, la quale, insieme alle $2n-1$ costanti arbitrarie $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, h, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$, contenute negl' integrali (6), (7), forma il numero $2n$ di costanti, che devono figurare nella soluzione generale del problema. Nel caso particolare di $l = 1$, ossia del sistema canonico (4), non occorre nemmeno una quadratura; giacchè si sa che l' integrale, che non contiene esplicitamente t, è :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t + b_n, \tag{8}$$

essendo b_n una costante arbitraria distinta dalle $2n-1$ costanti $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, h, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$.

§ III.

Del teorema esposto nel precedente paragrafo si può offrire anche la seguente dimostrazione, simile alla nota dimostrazione del teorema analogo di Jacobi.

Se nella (II, 5) si immagina sostituita la soluzione completa V, questa equazione sarà soddisfatta identicamente, qualunque siano i valori di $q_1, q_2, \dots q_n, a_1, a_2, \dots a_{n-1}$. Si può quindi derivare l'equazione (II, 5) rispetto alle a_r, e osservando che queste entrano soltanto nelle p_s, si otterrà:

$$\sum_s \frac{\partial Z}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial a_r} = 0, \qquad (r=1, 2, \dots n-1)$$

ossia per le (II, 7):

$$\sum_s \frac{\partial Z}{\partial p_s}\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial a_r} = 0. \tag{1}$$

Derivando completamente le (II, 6), si ha:

$$\sum_s \frac{\partial^2 V}{\partial a_r \partial q_s}\frac{dq_s}{dt} = 0. \tag{2}$$

Per confrontare i due sistemi (1), (2), consideriamo la matrice:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_2}, & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial q_2}, & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a_{n-1} \partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial a_{n-1} \partial q_2}, & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial a_{n-1} \partial q_n} \end{matrix}\right|$$

composta di $n-1$ linee orizzontali e di n verticali. Osserviamo che

gli n determinanti d'ordine n, compresi in essa, non possono essere tutti identicamente nulli. E invero, se ciò avvenisse, da una nota proprietà dei determinanti funzionali si ricaverebbe che V dovrebbe soddisfare a relazioni della forma:

$$f_1\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, \frac{\partial V}{\partial q_4}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_{n-1}}, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0,$$

$$f_2\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, \frac{\partial V}{\partial q_4}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_{n-1}}, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0,$$

$$f_3\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_4}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_{n-1}}, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0,$$

. . . .

$$f_n\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_{n-2}}, \frac{\partial V}{\partial q_{n-1}}\right) = 0,$$

nei cui membri non figurano le costanti a_1, a_2, ... a_{n-1}, h: la qual cosa non può essere, perchè V è soluzione completa di (II, 5).

Perciò, denotando con l una quantità indeterminata, che può supporsi funzione qualunque di $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n, t$, ma non identicamente nulla, i due sistemi (1), (2) offrono:

$$l\,\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial p_s}, \tag{3}$$

cioè si ottiene così la prima serie dell'equazioni (I, 1).

Derivando le (II, 7) si ha:

$$\frac{dp_s}{dt} = \sum_{s'} \frac{\partial^2 V}{\partial q_{s'} \partial q_s} \frac{dq_s}{dt},$$

ossia, in virtù delle (II, 7) stesse:

$$\frac{dp_s}{dt} = \sum_{s'} \frac{\partial p_{s'}}{\partial q_s} \frac{dq_{s'}}{dt},$$

e quindi per le (3):

$$l\frac{dp_s}{dt}=\sum_{s'}\frac{\partial p_{s'}}{\partial q_s}\frac{\partial Z}{\partial p_{s'}}.$$

Derivando la (II, 5) rapporto a q_s, la quale entra in Z dapprima esplicitamente e inoltre anche implicitamente nelle $\frac{\partial V}{\partial q_s}$ ossia nelle p_s, si ottiene:

$$-\frac{\partial Z}{\partial q_s}=\sum_{s'}\frac{\partial Z}{\partial p_{s'}}\frac{\partial p_{s'}}{\partial q_s}.$$

Confrontando quest' equazione con la precedente, si ha:

$$l\frac{dp_s}{dt}=-\frac{\partial Z}{\partial q_s},$$

cioè si ottiene la seconda serie dell' equazioni (I, 1); il che dimostra il teorema enunciato.

Supponiamo ora che sia $l=1$, cioè che il sistema (I, 1) sia canonico, e si tratti del sistema (II, 4). La dimostrazione fatta in questo paragrafo continua a sussistere intieramente, e ci offre gli stessi $2n-1$ integrali, che non contengono esplicitamente t, e che sussisterebbero per qualsivoglia espressione di l. Ma allora si può verificare inoltre che l' integrale che contiene esplicitamente t, è la (II, 8). E infatti in questo caso ai sistemi (1), (2), composti ciascuno di $n-1$ equazioni, si aggiungono rispettivamente le equazioni:

$$\sum_s\frac{\partial Z}{\partial p_s}\frac{\partial^2 V}{\partial q_s\,\partial h}=1, \tag{1'}$$

$$\sum_s\frac{\partial^2 V}{\partial h\,\partial q_s}\frac{dq_s}{dt}=1. \tag{2'}$$

Allora si osserverà che il determinante funzionale d' ordine n:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_2}, & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial q_2}, & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial q_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a_{n-1} \partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial a_{n-1} \partial q_2}, & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial a_{n-1} \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial q_2}, & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial q_n} \end{vmatrix}$$

non può essere identicamente nullo, perchè altrimenti la soluzione completa V sarebbe anche soluzione d' un' altra equazione della forma:

$$f\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0,$$

priva delle costanti $a_1, a_2, \dots a_{n-1}, h$: il che è impossibile. Confrontando quindi i due sistemi (1), (1'): (2), (2') si troverà la (3) stessa, dove però si ponga $l = 1$: ciò che dimostra che la (II, 8) è integrale del sistema canonico dato.

§ IV.

Dal § II risulta immediatamente che possiamo applicare anche ai sistemi (I, 1) una nota proposizione di Liouville relativa ai sistemi di Hamilton, formulando il seguente teorema: *Dato il sistema di equazioni differenziali ordinarie del prim' ordine*

$$l \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial p_s}, \tag{1}$$

$$l \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial q_s}, \tag{2}$$

nel quale Z *non contenga esplicitamente* t, *se oltre l'integrale*

$$Z(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n) = h, \tag{3}$$

essendo h *una costante arbitraria, si conoscono altri* n—1 *integrali :*

$$\varphi_r = a_r; \qquad (r = 1, 2, \ldots n-1) \tag{4}$$

se di più i primi membri delle equazioni (4) *sono funzioni delle* q. p, *non contenenti esplicitamente la variabile indipendente* t, *e soddisfacenti alle condizioni :*

$$(\varphi_r, \varphi_{r'}) = 0, \qquad (Z, \varphi_r) = 0 \tag{5}$$

per i valori 1, 2, ... $n-1$ *di* r, r' ; *e se infine l'equazioni* (3), (4) *si risolvono rispetto alle* p, *e si sostituiscono i valori di queste nell'espressione :*

$$\Sigma\, p_s dq_s\,, \tag{6}$$

quest' espressione sarà il differenziale esatto di una funzione V *delle* q, *e i rimanenti* n—1 *integrali del sistema* (1), (2), *non contenenti esplicitamente* t, *saranno* :

$$\frac{\partial V}{\partial a_r} = b_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots n-1) \tag{7}$$

essendo b_1, b_2, ... b_{n-1} *nuove costanti arbitrarie; e finalmente la funzione* V *soddisferà all' equazione differenziale parziale :*

$$Z\left(q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = h\,, \tag{8}$$

che si ottiene dall'integrale (3) *del sistema* (1), (2), *sostituendo* $\frac{\partial V}{\partial q_1}$, $\frac{\partial V}{\partial q_2}$, ... $\frac{\partial V}{\partial q_n}$ *rispettivamente a* p_1, p_2, ... p_n.

Di questa proposizione si può dare la dimostrazione seguente, simile alla dimostrazione del teorema analogo di Liouville.

Le condizioni (5) equivalgono alle condizioni d' integrabilità dell' espressione differenziale (6), la quale perciò sarà il differen-

ziale esatto di una funzione V delle variabili indipendenti $q_1, q_2, \ldots q_n$: onde:

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s. \tag{9}$$

Ora si ha:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial a_r} = \sum_s \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a_r}}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt} = \sum_s \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_s}}{\partial a_r}\frac{dq_s}{dt},$$

ossia per (1) e (8):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial a_r} = \frac{1}{l}\sum_s \frac{\partial p_s}{\partial a_r}\frac{\partial Z}{\partial p_s}. \tag{10}$$

Se adesso supponiamo che i valori delle p, ricavati dalle (3), (4) in funzione delle q, delle a e di h, si sostituiscano nell'espressione (3), quest' equazione diventerà un' identità, qualunque siano i valori delle q, delle a e di h, e si avrà:

$$\sum_s \frac{\partial Z}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial a_r} = 0.$$

Perciò la (10) diviene:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial a_r} = 0:$$

onde i rimanenti $n-1$ integrali del sistema (1), (2), non contenenti esplicitamente t, sono dati dalle equazioni (7).

Da (3) e (9) poi si deduce immediatamente che V soddisfa all' equazione differenziale (8).

Se $l = 1$ si ha, oltre le (10) e (11):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial h} = \sum_s \frac{\partial p_s}{\partial h}\frac{\partial Z}{\partial p_s},$$

$$\sum_s \frac{\partial Z}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial h} = 1;$$

onde :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial h} = 1.$$

Dunque :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t + b_n ,$$

essendo b_n una nuova costante arbitraria, è in tal caso l'integrale, che contiene esplicitamente il tempo.

Catania, 20 gennaio 1891.

Sugli esperimenti fatti con linfa di Koch nella Clinica Medica di Catania

—

Nota del Prof. S. TOMASELLI.

Signori

Mi limiterò in questa nota a riferire i risultati sull'azione curativa e sul valore diagnostico della linfa Koch. Gli Egregi Assistenti della Clinica Dott. Rapisarda ed Aradas si incaricheranno di riferire in altro lavoro tutte le modificazioni che avvengono e si succedono nell' organismo di seguito all' injezione della tubercolina; tenendo conto tuttavia di quegli infermi che tutt' ora trovansi in corso di cura e ciò per avere maggior agio a poter giudicare del potere terapeutico della tubercolina.

Sebbene sono di parere che 4 a 8 mesi non siano sufficienti a poter giudicare del valore terapeutico di un rimedio contro la tubercolosi, la quale, oltre di avere un corso abbastanza lungo, potrà avere periodi di sosta e non di rado la completa guarigione con quei rimedi e mezzi igienici di che la medicina dispone, ciò non pertanto ritengo che dopo 4 mesi è possibile ricavare una conclusione pressochè positiva, tenendo presente le fasi del processo tubercoloso. Ciò è possibile ad osservarsi con esattezza e precisione, come del resto è stato da noi praticato, una volta che la cura è affidata alla sola linfa; eccetto di quelle misure igieniche necessarie di unita ad una buona alimentazione sostanziale.

Si cominciarono gli esperimenti con la linfa, che ci fu spedita direttamente dal Ministero dello Interno, e con altra quantità sufficiente avuta per solerte cura del chiarissimo Sig. Direttore dello Ospedale V. E.

Sicuro della provenienza mi proposi provare in larga scala gli effetti nella Clinica medica generale da me diretta, ed eseguire una serie di esperimenti in diversi ammalati scelti a tal'uopo, studiando con rigorose ricerche e con diligente osservazione i risultati di siffatta nuova medicazione tanto nella tubercolosi del pulmone, quanto in qualche altro processo affine della pelle e in altri stati patologici diversi.

Le prime iniezioni per tale cura furono da me incominciate il 21 Gennaro ultimo scorso, e, fino a tutto Aprile gl' infermi sottoposti a siffatta prova sono stati in numero di 18, e nei quali fin allora si sono complessivamente praticate circa 140 iniezioni.

Gli ammalati a tal'uopo scelti possonsi classificare come siegue; dieci sono stati affetti da tubercolosi pulmonare, uno associato a tubercolosi laringea, due (donne) affette da lupus; altri cinque con malattie diverse onde comprovare anche l'azione della linfa in altre condizioni estranee al processo turbercolare, cioè; uno con catarro bronchiale cronico ed enfisema pulmonare, un secondo convalescente d' un accesso pleurale apertosi per la via dei bronchi, un terzo con itterizia per semplice angiocolite catarrale, un altro con una pulmonite cronica rimasta allo stadio d'epatizzamento alla base del pulmone sinistro, ed altro infine completamente guarito da reumatismo articolare.

Confermata anzitutto la diagnosi della malattia, la cura si è incominciata sempre colla iniezione d'un mezzo milligrammo, arrivando gradatamente, nelle successive, in alcuni fino a 12 milligrammi e in una delle ammalate di lupus fino a tre centigrammi e mezzo, e senza aver dovuto mai sperimentare effetti tossici nocivi, dovuti all' azione speciale del rimedio iniettato.

Negli ammalati tubercolosi, se la malattia non è stata agevole aversi in un periodo rigorosamente incipiente, pretesa difficile del resto se non impossibile conseguirsi in un ospedale, ho potuto accertarmi essere stata essa però in tale stadio da offrirsi il processo appena circoscritto all'apice d' un pulmone e senza notevole interesse nello stato generale dell' infermo.

L' età in tutti è stata compresa fra il diciottesimo al trentesimo anno; eccetto un solo, in cui l' età oltrepassando il cinquatesimo anno, e presentando il morbo segni non dubbi d' una fase inoltrata, lo esperimento fu interretto dopo la 3ª iniezione.

Accertata coll' esame clinico la natura della malattia in tutti gl' infermi di tubercolosi incipiente, la prova batteriologica, colla ricerca dei bacilli specifici del morbo, è stata anch' essa in tutti nettamente confermata, tenendo conto sempre di tutti i caratteri morfologici e quantitativi anche di essi per gli ulteriori esami comparativi relativi agli effetti della cura.

Stabilite rigorosamente le condizioni morbose locali e generali nei diversi pazienti si è incominciata la cura proporzionando sempre per gradi la quantità della *linfa* a seconda la elevatezza della febbre, la resistenza dell' individuo o la suscettibilità dello stesso alle possibili evenienze reattive del farmaco iniettato. Le iniezioni si sono praticate con due giorni o tre di riposo, constatando sempre le modificazioni locali e generali (registrate fedelmente in apposito foglio) regolarmente prima e dopo di ogni injezione, ponendo sempre cura a praticare le successive, ristabilitosi il relativo benessere dell' infermo dopo la completa scomparsa di qualche fenomeno riferibile alla precedente quantità di linfa.

Fino al 30 Aprile il massimo numero delle iniezioni praticate in alcuni è stato fino a trenta ed il minimo fino a dieci.

La intensità della reazione febbrile e dei fenomeni biologici locali e subbiettivi non è stata però in tutti nè costante nè uniforme; in alcuni per es. è stata varia la intensità della cefalgia, in altri, mancando questa, è stato anche vario il senso di addoloramento generale o agli arti, da alcuni altri finalmente di unita ad un sudore più o meno profuso si è accusato un senso diverso di spossamento generale. La tosse, quando più e quando meno, ha subita anch'essa qualche leggera modificazione; però l' esame attento dei fatti fisici locali *non ha mai addimostrato modificazioni rigorosamente apprezzabili, mostrandosi quasi sempre invariati tanto i fatti acustici e plessimetrici, quanto quelli relativi alle modificazioni quantitative e quali-*

tative degli sputi scandagliati quotidianamente col peso e con le osservazioni al microscopio.

Il numero dei bacilli se qualche volta si è mostrato in difetto, in prosieguo essendosi constatato il contrario, si è potuto ritenere essersi da ascrivere più che ad altro ad accidentali ragioni inerenti a qualche punto degli stessi espettorati. In qualunque caso la forma dei bacilli, è certo, non aver subito affatto modificazioni di sorta.

Il massimo grado della febbre è stata osservata nelle due affette di lupus, dove la temperatura ha raggiunto 40° a 40° 5. Con siffatta elevazione termica, di unita ai fenomeni accennati , ha costantemente corrisposto anche un proporzionato aumento nel numero delle pulsazioni e degli atti respiratori per ogni minuto primo. Nei tubercolosi però il risveglio della febbre non è stato mai così accentuato; in alcuni anche con dosi un po' spinte la reazione invece è stata ad osservarsi assai mite e leggera; così per es. in un giovane tubercoloso coricato al N.° 40 della Sala *Currò* con 8 milligrammi di linfa la reazione febbrile non ha oltrepassato quasi mai i 38° 5 , mentre in altro con una pulmonite cronica alla base del pulmone sinistro, (come sopra ho ricordato) e dove fin dal principio in moltissime ricerche non ci è stato dato rilevare mai la presenza di alcun bacillo della tubercolosi, pure con due milligrammi di linfa le reazioni febbrili sono state costantemente elevate da raggiungere il 40° grado.

Del resto mantenuti gli ammalati in condizioni igieniche eccellenti ed ottimamente alimentati, si è in tutti potuto accertare un certo aumento nel peso del corpo e perciò nella nutrizione, associato quasi sempre ad un relativo benessere generale nelle forze e nello stato funzionale dei diversi apparecchi come al solito.

In due degl' individui tubercolosi, essendosi la malattia manifestata con ripetute emottisi, ed in cui qualcuna anche appena ammessi all' Ospidale, pure , trascorso un certo tempo, dopo accertatasi la natura specifica del morbo, sottomessi all' azione della linfa, e parendoci temere il risveglio di qualche abbondante emottisi, (secondo è stato da qualcuno anche avvertito) nè la tosse però, nè i

fatti fisici locali hanno subìto modificazioni di sorta, nè la stessa emottisi si è giammai e sotto qualunque aspetto anco accennata con quella iperemia che dicesi svilupparsi di più in quel tessuto colpito da tubercolosi.

Dove a dire il vero l'azione della linfa si è mostrata addirittura efficace e pronta (almeno temporaneamente) si è stata in due donzelle (sorelle) colpite ugualmente da *lupus* alla faccia da deturpare, in una principalmente, quasi per esteso le fattezze delle guance, delle labbra e delle pinne nasali coverte già da spesse croste e gementi di continuo pus in abbondanza. Incominciando in questa con due milligrammi, dopo 24 iniezioni, si è raggiunta la dose di tre centigrammi e mezzo; e mentre dapprincipio le reazioni locali e generali si ebbero costantemente assai pronunziate, apportando perfino la completa caduta delle croste fin dalla 5ª iniezione; continuando ed elevando sempre più la quantità del farmaco, la reazione ad un certo punto si è arrestata, non avvertendo più l' ammalata effetto alcuno (anco subbiettivo) da siffatte iniezioni.

Del resto la superficie ammalata arrivò a presentarsi già in uno stato assai soddisfacente di cicatrizzazione. Nell'altra sorellina (di età minore) il rimarginamento delle piaghe in diversi punti anche della faccia mostròssi già completo dopo circa 16 iniezioni e con un massimo di 15 milligrammi di linfa.

Divenuta del resto nell'una e nell' altra refrattaria qualunque reazione del rimedio, ho fatto sospendere la cura per circa 18 giorni; dopo tale periodo di riposo si è dovuto constatare però la ricomparsa in qualche punto della faccia di piccole bottoni facili ad ulcerarsi, i quali del resto si sono modificati nuovamente col ripetersi di successive iniezioni, in seguito alle quali anche le reazioni tanto locali che generali mostraronsi anch' esse di minore intensità, è vero, ma discretamente sensibili.

A confermare gli effetti di questa linfa anche in altri ammalati nè *luposi* nè *tubercolosi*, e convincermi di quale importanza semiologica avrebbe potuto fino ad un certo punto essa ritenersi, oltre gli ammalati già accennati, ho fatto praticare qualche iniezione

anche in individui convalescenti o ristabiliti da altre comuni malattie: or bene, pur essendo stati essi apiretici da parecchio tempo, dopo la iniezione di un mezzo milligrammo di linfa, si è potuto, trascorse 4 a 6 ore, constatare un sensibile aumento della temperatura fino a 38° 8, (in uno) e 39° 2, (in altro) con corrispettivo aumento anche nella frequenza del polso e degli atti respiratorj, e coll'accompagnamento anche di molti di quei fatti subbiettivi relativi all'azione della linfa, come in quelli tubercolosi. Siffatti individui invero, chi più chi meno, dopo la sperimentata iniezione incominciarono a lagnarsi del solito spossamento generale e d'un dolore più o meno molesto alle articolazioni e ai muscoli degli arti tanto superiori che inferiori, accusavano discreta cefalgia, emettevano anche un sudore abbondante, e che tutto cessava poscia col dileguarsi di quella temporanea ipertermia.

È stato anche per me d'un certo significato l'esperimento fatto eseguire sopra due ammalati estranei addirittura anch'essi ad ogni processo tubercolare, uno affetto cioè da un semplice *angiocolite catarrale*, e l'altro da *enfisema pulmonare*; tutti e due apirettici completamente e nei quali infatti la temperatura non aveva mai oltrepassato i 36° 8 e 37° 2, nelle ore di sera. Or bene per confermare in questi le modificazioni possibili apportate della linfa di *Koch* sopra una soluzione di continuo di natura non tubercolosa, ho prescritta, nell'uno o nell'altro, l'applicazione di due larghi vescicanti in uno sulla regione ipocondrica destra e nell' altro sulla regione sopramammaria di sinistra.

Al secondo giorno (prima ancora di qualunque iniezione) il fondo della piaga nell'uno e nell'altro caso presentavasi d'un colorito quasi roseo con piccoli solcamenti in certi punti d'un rosso più intenso e umettato tutto d'un essudato sieroso scarso.

Stabiliti in tal modo i caratteri, si passa lo stesso momento alla iniezione d'un mezzo milligrammo di linfa per ciascuno; e mentre fin da cinque ore dopo si potè constatare già l'aumento solito della temperatura (38° 5 nell'*itterico*; 38° 8 nell'*enfisematico*) coll'accompagnamento di parte di quei fenomeni subbiettivi già descritti,

potè confermarsi, dopo già sette ore dalla praticata iniezione, l'aspetto del vescicante in tutti e due essersi anch'esso significantemente modificato.

Infatti il colorito si è presentato d'un fondo più spiccatamente *rosso* e fortemente congestionato, dando luogo anche ad una abbondantissima secrezione *muco-purulenta*.

Dal riassunto di tutte siffatte osservazioni (da dettagliarsi del resto in altra apposita relazione) (1) emergono, secondo me, spontanee le seguenti conclusioni:

1.° Che il valore *semiologico* di questa linfa non puossi accettare come assoluto e per tutti i casi decisivo, non essendo la sua azione sempre costante nel designare in mancanza d'altri criteri la *specialità del processo tubercolare*. Restando a tal'uopo sempre superiori i mezzi più inconcussi fornitici dalla Clinica e dalla Batteriologia.

2.° Che gli effetti *curativi* di essa non si hanno poi quella efficacia già a priori tanto decantata; non avendo apportate mai quelle modificazioni locali capaci a determinare la scomparsa assoluta del processo in qualunque stadio *esso si trovi*. E che d'altro canto il concorso dei mezzi igienici, di cui vengono circondati simili infermi, può molto valere, anche da solo, a determinare quei periodi di sosta e quel temporaneo miglioramento della malattia fino al momento in qualche caso osservati.

3.° Che intorno al *lupus* quantunque non sia a negarsi spesso una pronta efficacia sul processo d'esulcerazione; anche fin dalle prime iniezioni, non è però ancora a ritenersi decisivo il vero valore terapeutico di essa per la completa e deffinitiva guarigione del morbo.

---

(1) Redatta dagli assistenti della Clinica.

Il Lias medio del M. San Giuliano (Erice) presso Trapani

pel Dott. GIOVANNI DI-STEFANO.

paleontologo dell' Ufficio geologico italiano.

I.

Il Lias medio del M. San Giuliano.

Questo lavoro è diretto allo studio stratigrafico e paleontologico minuto di una massa molto potente di calcari del Lias medio, per ricercare se principalmente con la guida dei brachiopodi sia possibile distinguere in essi vari livelli, che possano servire poi da termine di paragone per l'ordinamento dei calcari con crinoidi e brachiopodi meglio studiati del bacino mediterraneo. Simile tentativo non si è fatto sinora per le difficoltà che si oppongono alla esatta divisione delle faune nei calcari con crinoidi; ma giacchè nel Lias medio del M. San Giuliano esiste una linea di divisione stratigrafica, e lo studio dei brachiopodi, se ancora non può condurre a fondare vere zone nel significato che loro è dato modernamente (1), può permettere tuttavia di stabilire dei livelli, ho voluto esporre qui il risultato delle mie ricerche che, se non altro, possono servire a far conoscere un importante deposito liassico.

Il M. San Giuliano, cioè l'antico Erice, è l'estrema diramazione del gruppo di monti mesozoici della parte settentrionale di Sicilia, e s'innalza di 751 m. sul livello del mare che ne lambe parte della base. Esso è molto noto nell'isola per le memorie del celebrato tempio di Venere ericina, per gl'importanti avanzi di costruzioni pelasgiche e per le antiche cave di marmi, ora esaurite. La sua struttura è messa a nudo dalla frattura che lo sezionò nel lato S. E. e rese visibile una bella e regolare successione di strati fortemente inclinati a S. O. e diretti da N. O. a S. E. Essi sono riccamente

(1) Neumayr, *Ueber unvermittelt auftretende Cephalopodentypen in Jura Mittel-Europa's*, 1878 (Jahrb. d. k. k. geol. R.-A.)

fossiliferi e fra i più importanti della Sicilia; nondimeno, dopo la brevissima descrizione geognostica che ne fece F. Hoffmann (1), solo in tempi molto recenti sono stati oggetto di studio esteso. Nel 1884 io pubblicai la illustrazione dei brachiopodi di quel Dogger inferiore (2) e più tardi, cioè nel 1886, il prof. Gemmellaro (3) diede la descrizione geologica del monte e l'esame di tutta l'abbondante fauna del Dogger inferiore. Nello stesso anno il march. A. De-Gregorio (4) descrisse alcuni dei fossili dell'Erice, dei quali ripubblicò le tavole in un secondo lavoro (5), e l'ing. L. Baldacci stampò dei cenni sulla costituzione del monte nella sua nota bell'opera sulla geologia della Sicilia (6). Ora io credo bene di ritornare sullo studio del M. San Giuliano per esaminare i calcari del Lias medio, che sono importanti per la più estesa conoscenza paleontologica e stratigrafica di questo piano. Pertanto noto che la serie dei piani e dei livelli costitutivi del monte (tralasciando di riportare i calcari elveziani con *Heterostegina*, grandi *Pecten* e *Clypeaster*, perchè sono nella pianura e non fanno parte del monte) è la seguente:

8. Calcari dell'Eocene compatti, talora brecciformi, grigi, con abbondanti piccole nummuliti.

7. Calcari finamente cristallini, grigi o biancastri del Titonico con *Terebratula diphya* Cat., *Lytoceras quadrisulcatum* d'Orb. sp., *Phylloceras ptychoicum* Quenst. sp. ecc.

6. Calcari cristallini, grigio-chiari, qua e là macchiati di verdastro, della zona con *Aspidoceras achanthicum* Opp. sp.

---

(1) Hoffmann, *Geognostische Beobachtungen ecc.;* Berlin, 1839, pag. 454.

(2) Di-Stefano, *Ueber die Brachiopoden des Unteroolithes von M. San Giuliano bei Trapani (Sicilien); Wien*, 1884 (Jahrb. d. k. k. geol. R. A., 34 Bd.)

(3) Gemmellaro, *Sul Dogger inferiore del M. San Giuliano (Erice)*; Palermo 1886 (Boll. della Soc. di Sc. Nat. ed Econ. di Palermo; seduta del 29 gennaio 1886).

(4) De-Gregorio, *Nota intorno a taluni fossili di M. Erice di Sicilia del piano Alpiniano* De Greg.; Torino, 1886 (Estratto dagli Atti della R. Acc. di Sc. di Torino, S. II, T. XXXVII.)

(5) De-Gregorio, *Iconografia della fauna dell'orizzonte Alpiniano*; Palermo, 1886.

(6) Baldacci, *Descrizione geologica dell'isola di Sicilia*; Roma, 1886. (Mem. descrittive della carta geol. dell'Italia)

5. Calcari cristallini con grana molto fina, bianchi, tendenti al verdastro, assai spesso macchiati di carneo, con *Peltoceras transversarium* Quenst. sp. ecc.

4. Calcari compatti, grigio-chiari, con liste e nodoli di selce, sterili di fossili, rappresentanti con molta probabilità la zona con *Stephanoceras macrocephalum* Schloth. sp.

3. Calcari compatti grigio-oscuri, con nodoli di selce, riposanti in concordanza su quelli del Dogger inferiore. Contengono la fauna degli strati di Klaus, con *Posidonomya alpina* Gras, *Rhynchonella Atla* Opp., *Rh. defluxa* Opp., *Terebratula pteroconcha* Gemm. ecc.

2. Calcari neri o nerastri, con grossolane ooliti ferruginose, riposanti con leggiera discordanza sul Lias medio. Offrono una fauna ricchissima del Dogger inferiore, con *Harpoceras opalinum* Rein. sp. *Ludwigia Murchisonae* Sow. sp., *Terebratula spheroidalis* Sow. ecc.

1. Calcari grigi e bianchi, compatti o cristallini, con o senza crinoidi, ricchi di brachiopodi e lamellibranchi del Lias medio.

Gli strati del Lias medio formano la base dirupata del monte, e, comparendo come roccia fondamentale, non fanno scorgere gli strati sui quali riposano. La loro potenza apparente è di circa 250 m., come si vede nel lato S. E. del monte, sulla destra di chi sale le primi rampe della strada rotabile di San Giuliano. Essi cominciano molto sotto il balzo dei Cappuccini per mezzo di spessi strati di calcare tenace, cristallino, grigio, sparso di macchie giallastre e di venature bianche spatiche, zeppo di crinoidi indeterminabili e di brachiopodi, ma scarso di pelecipodi. Le sue specie più frequenti sono: *Sp. rostrata* Schloth. sp., *Sp. Hartmanni* Deslongc. non Zieten, *Sp. gibba* Seg., *Rh. Briseis* Gemm. ecc.

Questi strati, il cui spessore si avvicina ai 100 m., passano superiormente ad altri di calcare grigio-chiaro, compatto oppure subcristallino, poverissimo o assai spesso scevro di crinoidi, con molte *Lima*, col *Pecten heterotus* Gemm. et Di-Blasi, con alcune *Scurriopsis* e con esemplari del *Nautilus affinis* Gemm. e del *N. demonensis* Gemm. Tale calcare ha lo spessore di circa 50 m. e alla parte superiore

passa alla sua volta a strati di calcari cristallini bianchissimi, con sfumature carnicine qua e là, formati interamente dall' accumulo di articoli di crinoidi e di conchiglie di brachiopodi e di pelecipodi. Essi raggiungono la potenza di circa 100 m. Fra i loro brachiopodi sono notevoli per abbondanza o per importanza la *Rh. curviceps* Quenst. sp., la *Rh. Eleuteria* Di-Stef., la *Ter. punctata* Sow., la *Ter. Rotzoana* Schaur., la *Wald. Verneuili* Deslongc., var., la *Wald. quadrifida* Lmk. var. *lyliboea* Di-Stef. ecc. Fra i pelecipodi predominano le *Lima* del sottogenere *Plagiostoma*, quasi tutte nuove, il *Pecten heterotus* Gemm. et Di-Blasi, il *P. textorius* Schloth. sp. e varie specie indescritte.

Come si vede, si presentano dunque nel Lias medio del M. San Giuliano due livelli di calcari con crinoidi e brachiopodi, secondo fu già notato dal prof. Gemmellaro, i quali, per la spessa zona di calcare compatto che li separa e pel loro colore differente, sono sul terreno ben distinti a prima vista e sembrano anzi appartenere a due piani geologici. Per questo è necessario di studiare minutamente e separatamente la loro fauna.

Nel livello più basso, costituito di calcare grigio con crinoidi, si raccolgono le seguenti specie:

Spiriferina rostrata Schloth. sp.
„ *sicula* Gemm.
„ *Hartmanni* Deslongc. non Zieten
„ *Darwini* Gemm.
„ *Statira* Gemm.
„ *angulata* Opp.
„ *Zignoi* Di-Stef.
„ *gibba* Seg.
„ *Münsteri* Davids.
Rhynchonella curviceps Quenst. sp.
„ *tetraedra* Sow. sp.
„ *serrata* Sow. e var. *Kiliani* Di-Stef.
„ *Scherina* Gemm.
„ *Glycinna* Gemm., var.

Rhynchonella palmata Opp.
„ *Dalmasi* Dum.
„ *Caroli* Gemm. (=*Rh. Cartieri* Opp.)
„ *Alberti* Opp.
„ *Briseis* Gemm. e var. *Iphimedia* Di-Stef.
„ *ptinoides* Di-Stef.
Waldheimia securiformis Gemm., var. *pomatoides* Di-Stef.
„ cfr. *subnumismalis* Davids.
„ *Ewaldi* Opp.
„ *Rothpletz* Di-Stef. (=*Z. linguata,* var. *major* Haas non Böck = *Wald. Haasi* Rothpl. non Buckmann)
Lima (*Plagiostoma*) nov. sp. aff. *L. semilunaris* Ziet.
Pecten (*Chlamys*) *textorius* Schloth. sp.
„ „ *heterotus* Gemm. et Di-Blasi
„ „ *anomioides* Gemm. et Di-Blasi
„ (*Pseudamussium*) *Stoliczkai* Gemm.
„ „ *Bellampensis* Gemm. et Di-Blasi
Avicula (*Oxytoma*) *sinemuriensis* d'Orb.
Nautilus sp.
Harpoceras Algovianum Opp. sp.
„ *Kurrianum* Opp. sp.

Nel livello più elevato, cioè nei calcari bianchi con crinoidi si trovano queste specie:

Spiriferina rostrata Schloth. sp.
„ *Handeli* Di-Stef.
„ *sicula* Gemm.
„ *Hartmanni* Deslongc. non Zieten
„ *Darwini* Gemm.
„ *Geyeri* Di-Stef.
„ *Zignoi* Di-Stef.
„ *gibba* Seg.
„ *Münsteri* Davids. sp. e var. *recondita* Seg.

Rhynchonella curviceps Quenst. sp.
„ *tetraedra* Sow. sp.
„ *serrata* Sow. e var. *Kiliani* Di-Stef.
„ *Dalmasi* Dum.
„ *Eleuteria* Di-Stef.
„ *Zugmayeri* Gemm.
Terebratula punctata Sow.
„ *sphenoidalis* Mgh. apud Gemm.
„ *Rotzoana* Schaur. e var. *plicata*
Waldheimia securiformis Gemm., var. *pomatoides* Di-Stef.
„ *Catharinae* Gemm.
„ *Darwini* Deslongc.
„ cfr. *subnumismalis* Davids.
„ *quadrifida* Lmk. sp., var. *lyliboea* Di-Stef.
„ *Verneuili* Deslongc., var.
Kingena Capellinii Di-Stef.
„ *Iosephinia* Gemm.
Placunopsis sp. nov.
Lima Haueri Stol.
„ (*Plagiostoma*) sp. nov. aff. *L. semilunaris* Ziet.
„ „ sp. nov. aff. *L. Echo* d' Orb.
„ „ sp. nov. aff. *L. Choffati* Di-Stef.
„ „ sp. nov. aff. *L. Eucharis* d' Orb.
„ (*Radula*) sp. nov. aff. *L. pectinoides* Sow.
Pecten (*Chlamys*) *textorius* Schloth.
„ „ *heterotus* Gemm. et Di-Blasi
„ „ sp.
„ „ sp. nov. aff. *P. Rollei* Stol.
„ (*Pseudamussium*) *Stoliczkai* Gemm.
„ „ sp.
„ „ *Hehlii* d' Orb.
Avicula (*Oxytoma*) *sinemuriensis* d' Orb.
Mytilus sp.
Pleurotomaria sp.

Dall' esame di questi elenchi di fossili si trae che le faune dei due livelli appartengono al Lias medio. I due cefalopodi determinati (*Harp. Algovianum* Opp. sp. , *Harp. Kurrianum* Opp. sp.) sono sufficienti a porre in tale piano il livello inferiore; però essi non hanno valore per una determinazione di zona, essendo i cefalopodi dei nostri calcari con crinoidi e brachiopodi del tutto inadatti, almeno per ora, a fare stabilire tali divisioni. Il resto delle specie del livello inferiore confermano questo riferimento di età. Su 32 specie che rimangono, una era ritenuta speciale del Lias inferiore di Taormina (*Sp. segregata* Di-Stef.), 3 si raccolgono nel Lias inferiore della provincia di Palermo (*Sp. Darwini* Gemm., *P. anomioides* Gemm. et Di-Blasi, *P. heterotus* Gemm. et Di-Blasi), delle quali la *Sp. Darwini* passa anche nel Lias medio della provincia di Palermo e di Messina, e una (*Rh. Caroli* Gemm. = *Rh. Cartieri* Opp.) è comune al Lias inferiore di Hierlatz e della provincia di Palermo. Gli altri fossili o sono speciali del Lias medio (*Sp. Statira* Gemm., *Sp. gibba* Seg., *Rh. serrata* Sow., sp., *Rh. Glycinna* Gemm., *Rh. Dalmasi* Dum., *Wald. securiformis* Gemm.) , oppure si presentano nel Lias inferiore e nel medio , e qualcuna nel superiore. Però se fra queste si tolgono la *Sp. angulata* Opp., la *Rh. Alberti* Opp., la *Rh. palmata* Opp., la *Wald Ewaldi* Opp. e il *P. textorius* Schloth. sp., a dir vero assai più sviluppate nel Lias inferiore, la massima parte sono di quelle che offrono il più grande sviluppo nel medio (*Sp. rostrata* Schloth. sp., *Sp. sicula* Gemm., *Sp. Hartmanni* Deslongc. non Zieten, *Sp. Münsteri* Davids., *Rh. curviceps* Quenst. sp., *Rh. Briseis* Gemm., *Rh. tetraedra* Sow. sp., *P. Stoliczkai* Gemm., *Av. sinemuriensis* d'Orb.). La *Wald. Rothpletzi* Di-Stef. = *Wald. linguata*, var. *major* Haas non Böck = *Wald. Haasi* Rothpl. non Buck. si presenta pure a San Cassiano in calcari riferibili alla parte inferiore del Lias medio.

È da escludere dunque che i calcari a crinoidi grigi del livello inferiore descritto possano riferirsi al Lias inferiore: essi vanno posti nel Lias medio, come gli altri di Sicilia detti con *T. Aspasia*,

che col loro tipo promiscuo di specie del Lias inferiore e del medio ripetono in questo la *facies* di Hierlatz.

Così esattamente si può anche eliminare il dubbio che il livello più alto possa rappresentare il Lias superiore. Delle sue 43 specie una sola sinora pareva propria del Lias inferiore di Hierlatz (*L. Haueri* Stol.); 2 provengono dalla parte elevata del Lias inferiore di Taormina (*Sp. segregata* Di-Stef., *Sp. Handeli* Di-Stef.); 3 dal calcare cristallino del Lias inferiore della provincia di Palermo (*Sp. Darwini* Gemm.; *Rh. Zugmayeri* Gemm., *P. heterotus* Gemm. et Di-Blasi); 2 sogliono essere più proprie delle parti elevate del Lias medio e passano anche nel superiore (*T. Rotzoana* Schaur., *Wald. Darwini* Deslongc.); 9 sono ritenute finora speciali del Lias medio (*Sp. gibba* Seg., *Rh. serrata* Sow. sp., *Rh. Dalmasi* Dum., *T. sphenoidalis.* Mgh. apud Gemm., *Wald. Verneuili Deslongc.,* var., *Wald. securiformis* Gemm.) *Wald. Catharinae* Gemm., *Wald. quadrifida* Lmk., *Kingena Josephinia* Gemm.), e il resto delle specie già note, pur trovandosi nel Lias inferiore e nel medio e taluna anche nel superiore, sono nondimeno di quelle che raggiungono il massimo sviluppo nel medio (*Sp. rostrata* Schloth. sp., *Sp. sicula* Gemm., *Sp. Hartmanni* Deslongc., *Sp. Münsteri* Davids., *Rh. curviceps* Quenst., *Rh. Briseis* Gemm., *Rh. tetraedra* Sow. sp., *Ter. punctata* Sow., sp. *Wald.* cfr. *subnumismalis* Davids., *A. sinemuriensis* d'Orb.), se però se ne eccettuano il *Pect. textorius* Schloth. sp. e il *P. Hehlii* d' Orb. più sviluppati nel Lias inferiore. Dodici specie infine sono nuove e una non permette l' esatto apprezzamento de' suoi caratteri.

Da quanto abbiamo esposto si trae dunque che il livello superiore di calcari con crinoidi e brachiopodi del M. San Giuliano rappresenta certamente anch'esso il Lias medio.

Intanto è da notare che tra le faune dei due livelli di calcari con crinoidi si rilevano alcune differenze importanti. Prima di tutto si osserva che in quello elevato. cioè nei calcari bianchi, si presentano alcune specie di molto significato che mancano nel livello inferiore, come sono la *Ter. Rotzoana* Schaur., che si raccoglie

nelle porzioni elevate del Lias medio e specialmente nel superiore, la *Wald. quadrifida* Lmk. sp., var. e la *Wald. Darwini* Deslongc., più solite degli strati alti del Lias medio, e delle quali l' ultima passa anche in quelli con *Leptaena* del Lias superiore (1). Inoltre mancano nel livello superiore alcuni tipi del Lias inferiore di Hierlatz che invece si raccolgono frequentemente in quello inferiore, come sono la *Sp. angulata* Opp., la *Rh. palmata* Opp., la *Rh. Alberti* Opp. e la *Wald. Ewaldi* Opp., e dippiù si nota in esso una maggior quantità centesimale di specie comuni col Lias inferiore in generale. Per questi suoi caratteri, che indicano più strette relazioni con le parti elevate del Lias medio e col superiore, il livello più alto di calcari con crinoidi del M. San Giuliano mostra rispetto a quello più basso un carattere di maggiore gioventù, il che corrisponde alla sua posizione stratigrafica elevata.

I contrassegni distintivi dei due livelli si mostrano più spiccati se si considera che ci sono delle specie e delle varietà nuove caratteristiche per ognuno di essi. Infatti la *Rh. ptinoides* Di-Stef. è speciale degli strati inferiori, mentre la *Sp. Geyeri* Di-Stef., la *Rh. Eleuteria* Di-Stef., la *Kingena Capellini* Di-Stef., e le varietà riferite alla *Vald. Verneuili* Deslongc. e alla *Wald. quadrifida* Lmk. sp. sono proprie di quelli superiori.

Pertanto non deve esagerarsi il valore di tali differenze, che è naturale si trovino in un deposito molto potente e formatosi perciò in uno spazio di tempo relativamente lungo; nondimeno esse mostrano che i calcari con crinoidi non occupano nel Lias medio un livello determinato, ma che possono ripetersi a varie altezze e con certe differenze di faune, al quale fatto, già conosciuto per ragioni paleontologiche, mancava sinora la prova stratigrafica che fornisce lo studio del M. San Giuliano.

(1) Choffat, *Étude stratigraphique et paléontologique des térrains jurassiques du Portugal*, 1. Lisbonne, 1880.

II.

Sul possibile ordinamento dei calcari con crinoidi e brachiopodi del Lias medio mediterraneo.

§ 1. La determinazione dei due livelli di calcari con crinoidi e brachiopodi del monte San Giuliano stratigraficamente sovrapposti, può facoltare, per mezzo del loro paragone, a tentare la divisione in una porzione inferiore e in una superiore di altri calcari fossiliferi del Lias medio mediterraneo (sebbene non sia facile stabilire dei retti criterj distintivi), e tale che possa servire da riprova ai minuti riferimenti di età fatti sinora solo paleontologicamente e in modo vago e generale. Per procedere a questo, fermiamoci prima sul paragone dei due livelli descritti del M. San Giuliano con i calcari a crinoidi e brachiopodi di altre regioni della Sicilia.

Le faune siciliane del Lias medio meglio conosciute sono quelle della provincia di Palermo, di Galati di Tortorici (Messina) e del piccolo promontorio di Castelluccio presso Taormina (Messina). Le prime furono già illustrate compiutamente dal prof. G. Gemmellaro (1), e all' elenco dei fossili riportato da lui, compostó di specie principalmente raccolte sulla Montagnola di S. Elia (Palermo), di Chiusa-Sclafani e della contrada Sant' Anna presso Giuliana nella provincia di Palermo, non ci è da aggiungere altro che la *Sp. Darwini* Gemm. (= *Sp.* cfr. *angulata* Gemm. non Opp.) di Sant' Anna. Le faune delle tre località cennate della provincia di Palermo (2) hanno

(1) Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona con T. Aspasia Mgh. della provincia di Palermo e di Trapani*; Palermo, 1874. (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia, 1872-82).

(2) I fossili che si raccolgono nei tre luoghi notati sono i seguenti. Nel calcare grigio, talvolta macchiato di rosso, con crinoidi della Montagnola di S. Elia si raccolgono: *Koninkella gibbosula* Gemm. sp.; *Sp. rostrata* Schloth. sp., *Rh. pusilla* Gemm., *Rh. Briseis* Gemm., *Rh. Zitteli* Gemm., *Rh. serrata* Sow. sp., *Rh. Scherina* Gemm., *Rh. furcillata* Theod. sp., *T. rudis* Gemm., *T. Taramellii* Gemm., *T. Piccininii* Zitt., *T. Aspasia*, Mgh., *Wald. Ewaldi* Opp., *Wald. Catharinae* Gemm., *Wald. costulata* Gemm., *Wald.* cfr. *numismalis* Lmk. sp, *Anomia numismalis* Quenst.

In quello bianco, talvolta tendente al carneo, con crinoidi, di Sant'Anna di Giuliana: *Sp. Statira* Gemm., *Sp. rostrata* Schloth. sp, *Sp.*, *sicula* Gemm, *Sp. Darwini* Gemm., *Sp. Mün-*

gli stessi caratteri generali e sono sì strettamenente legate che nella ricerca della porzione antica o recente del Lias medio alla quale spettano, possono studiarsi riunite. L' insieme delle loro specie è notato dal prof. Gemmellaro nel quadro che chiude il suo lavoro; io pertanto le ho enumerate qui sotto divise secondo il luogo d'onde provengono.

Le faune di Galati e del promontorio di Castelluccio sono state studiate in parte dal prof. Gemmellaro, che descrisse i cefalopodi di Galati (1), e dal prof. Seguenza (2); però una critica minuta degli elenchi pubblicati e l' abbondante quantità di fossili di quei luoghi raccolti ora nel Museo geologico dell' Università di Palermo, fanno necessario che io enumeri di nuovo tali faune.

I calcari rossi o grigi, cristallini o subcristallini del Lias medio

---

steri Davvids. sp., *Rh. Reynesi* Gemm. non Opp., *Rh. triquetra* Gemm., *Rh. Kraussi* Gemm., *Rh. inversa* Opp., *Rh. retusifrons* Opp., *Rh. Orsinii* Gemm., *Rh. Kriseis* Gemm., *Rh. polyptycha* Opp., *Rh. serrata* Sow. sp., *Rh. Scherina* Gemm., *Rh. flabellum* Mgh., *Rh. Mariottii* Zitt, *Rh. furcillata* Theod. sp., *T. sphenoidalis* Mgh. apud Gemm., *T. Aspasia* Mgh, *Wald. Catharinae* Gemm., *Wald. securiformis* Gemm., *Wald. stapia* Opp., *Wald. Engelhardti* Opp., *Wald. Ewaldi* Opp., *Placunopsis Zitteli* Gemm., *Pect. Stoliczkai* Gemm., *Pect. Ponzii* Gemm., *Pect. Agathis* Gemm., *Lima Deslongchampsi* Hauer, *L. liasina* Gemm., *Eunema alpina* Stol. sp., *Tr. Cupido* d'Orb., *Tr. quadrimonilis* Gemm., *Ch. sinistrorsa* Gemm., *Rhac. mimotense* d'Orb. sp., *Harp. algorianum* Opp. sp., *Ar.* cfr. *tardecrescense* v. Hauer sp.

In quello bianco, talora tendente al carneo, con crinoidi, di Chiusa Sclafani: *Konink. gibbisula* Gemm., *Sp. rostrata* Schloth. sp., *Sp. sicula* Gemm., *Rh. Orsinii* Gemm., *Rh. Briseis* Gemm., *Rh. Glycinna* Gemm., *Rh. Scherina* Gemm., *Rh. flabellum* Mgh., *T. sphenoidalis* Mgh apud. Gemm., *T. Aspasia* Mgh., *Wald. securiformis* Gemm., *Wald. costulata* Gemm., *Wald. Engelhardti* Opp., *Wald. stapia* Opp., *Wald. Ewaldi* Opp., *Kingena Josephinia* Gemm., *Placunopsis Zitteli* Gemm., *Pect. Agathis* Gemm., *L. Deslongchampsi* Stol., *Av. sinemuriensis* d'Orb. *Ar. sexcostata* Roem., *Arca aviculina* Schafht., *Pleur. Scacchii* Gemm., *Pleur.* cfr. *princeps*, Koch. et Dunk. sp., *Pleur. trochotomopsis* Gemm., *Crypt. heliciformis* Deslongc., *Crypt. expansa* Sow. sp., *Dischoh. orbis* Reuss, sp., *Discoh. excavata* Reuss sp., *Eun. alpina* Stol. sp., *Tr. Cupido* d'Orb., *Tr. Scherinus* Gemm., *Tr. quadrimonilis* Gemm., *Ch. sinistrorsa* Gemm., *Phyll. Meneghinii* Gemm., *Harp. algovianum* Opp. sp., *Harp. Scherinum* Gemm., *Lyt. Czizcki* v. Hauer, *Ar.* cfr. *tardecrescens* v. Hauer.

(1) GEMMELLARO, *Sui fossili degli strati a T. Aspasia della contrada Roccherosse presso Galati*; Dispensa 1ª; Palermo, 1884.

(2) SEGUENZA, *I minerali della provincia di Messina, 1885* (pagine staccate da un' opera che non fu pubblicata)—*Intorno al sistema giurassico nel territorio di Taormina*, 1885. (Natur. sicil. a. IV)—*Le Spiriferina dei varii piani del Lias messinese* 1886. (Boll. della Soc. geol. ital.; vol. IV.)

delle Rocche rosse sul M. Ucina presso Galati di Tortorici giacciono tra il Lias inferiore (1) e un calcare nerastro, che, pe' suoi caratteri litologici e pel suo posto stratigrafico immediatamente sottostante agli strati con la fauna di Klaus, sembra corrispondere al Dogger inferiore del M. San Giuliano (Trapani). In questi calcari del Lias medio si raccoglie una fauna abbondantissima e mista di cefalopodi, brachiopodi, gasteropodi e lamellibranchi, che attendono ancora la loro compiuta illustrazione: io ne cito qui le molte specie note e quelle nuove che si presentano anche al M. San Giuliano. La lista che è utile di conoscere è la seguente:

Spiriferina rostrata Schloth. sp.
" *pyriformis* Seg. (=? *Sp. terebratuloides* Seg.)
" *gryphoidea* Uhlig. (=*Sp. ovata* Seg.)
" *brevirostris* Opp. (=*Sp. plano-convexa* Seg.)
" *alpina* Opp. (=*Sp. compressa* Seg. ecc.)
" *sicula* Gemm. (=*Sp. undulata* Seg.)
" *Hartmanni* Deslongc. non Ziet. (=*Sp. capuliformis* Seg.)
" *gibba* Seg.
" *Darwini* Gemm.
" *angulata* Opp. (=*Sp. Carmelinae* Seg. e var. *pyramidata* Seg.)
" *Münsteri* Davids. sp.
Rhynconella Scherina Gemm.
" *serrata* Sow. sp.
" *Glycinna* Gemm. var.
" *Briseis* Gemm.
" *flabellum* Mgh.
" *Orsinii* Gemm.
" *pusilla* Gemm.
" *triquetra* Gemm.
" *Sordellii* Par.

(1) Baldacci, *Descrizione geologica dell'isola di Sicilia* ecc., pag. 141.

Rhynconella rimosa v. Buch.
„ *polyptycha* Opp.
„ *Alberti* Opp.
„ *ptinoides* Di-Stef.
„ *Reynesi* Gemm. non Opp.
„ *palmata* Opp.
„ *Dalmasi* Dum.
Terebratula sphenoidalis Mgh. apud Gemm.
„ *Aspasia* Mgh.
„ *cornicolana* Can.
Valdheimia securiformis Gemm., var. *pomatoides* Di-Stef.
„ *stapia* Opp.
„ *Ewaldi* Opp.
„ *Furlana* Zitt., var. *elongata* Mgh.
Pecten (*Chlamys*) *subreticulatus* Stol.
„ (*Pseudamussium*) *Stoliczkai* Gemm.
Avicula (*Oxytoma*) *sinemuriensis* d' Orb.
Pleurotomaria Suessi Hoern.
„ cfr. *foveolata* Deslongc.
„ *intermedia* Münst.
„ *anglica* Sow. sp.
„ *princeps* Koch et Dunk. sp.
Trochotoma cfr. *striatum* Hoern.
Eunema alpina Stol. sp., var.
Lewisiella conica d' Orb. sp.
Trochus (*Eutrochus*) *Cupido* d' Orb.
„ (*Gibbula*) cfr. *Avernus* Stol.
Chemnitzia (*Rhabdoconcha*) cfr. *hierlatzensis* Stol.
Discohelix Reussi Hoern. sp.
„ *orbis* Reuss
„ cfr. *reticulata* Stol.
Nautilus affinis Gemm.
„ *demonensis* Gemm.
Phylloceras Partschi Stur.

Phylloceras Alontinum Gemm.
„ *Meneghinii* Gemm.
Rhacophyllites libertum Gemm.
Aegoceras (Liparoceras) Bechei Sow. sp.
„ *(Deroceras) submuticum* Opp. sp.
Tropidoceras masseanum Opp. sp., var. *mediterranea* Gemm.
„ *Flandrini* Dum. sp.
„ *Zancleanum* Gemm.
Coeloceras pettos Quenst. sp.
Belemnites paxillosus Schloth.

Il calcare grigio con crinoidi, che al piccolo promontorio di Castelluccio presso Taormina riposa sul Lias inferiore, fornisce una bella fauna, della quale le specie note e quelle nuove, che si raccolgono pure al M. San Giuliano, sono queste:

Spiriferina rostrata Schloth. sp.
„ *sicula* Gemm. (= *Sp. undulata* Seg.)
„ *Statira* Gemm.
„ *angulata* Opp. (= *Sp. Carmelinae* Seg.)
„ *gryphoidea* Uhl. (= *Sp. ovata* Seg.)
„ *alpina* Opp. (= *Sp. compressa* Seg. ecc.)
„ *Davidsoni* Deslongc. = (*Sp. producta* Seg.)
„ *segregata* Di-Stef.
„ *Darwini* Gemm.
„ *gibba* Seg.
Rhynchonella Glycinna Gemm.
„ *serrata* Sow. sp.
„ *Orsini* Gemm.
„ *flabellum* Mgh.
„ *Dalmasi* Dum.
„ *Briseis* Gemm. e var. *Iphimedia* Di-Stef.
„ *ptinoides* Di-Stef.
„ *polyptycha* Opp.
Terebratula sphenoidalis Mgh. apud Gemm.

Terebratula punctata Sow.
„ *Aspasia* Mgh.
„ *Beyrichi* Opp.
Valdheimia cfr. *numismalis* Lmk. sp.
„ *mutabilis* Opp.
„ *stapia* Opp.
„ *Engelhardti* Opp.
„ *securiformis* Gemm., var. *pomatoides* Di-Stef.
„ *Rothpletzi* Di-Stef.
Pecten (Clamys) heterotus Gemm.
„ *(Pseudamussium) Stoliczkai* Gemm.
Avicula (Oxytoma) sinemuriensis d'Orb.
Lima (Plagiostoma) sp. nov. aff. *L. semilunaris* Ziet.
Discohelix Reussi Hoern. sp.
„ *orbis* Reuss sp.
Trocus (Eutrochus) lateumbilicatus d' Orb.
Phylloceras Partschi Stur sp.
„ *Alontinum* Gemm.
Rhacophyllites libertum Gemm. sp.
Tropidoceras Zancleanum Gemm. sp.
Harpoceras Algovianum Opp. sp.
„ *Kurrianum* Opp. sp.
„ *scherinum* Gemm.

I cefalopodi delle varie faune notate sopra provano con sicurezza che esse appartengono al Lias medio ; però tali fossili, pel loro ristretto numero e pel modo del loro aggruppamento, non rendono possibile una determinazione di zona nel senso che le si dà modernamente. Il *Coeloceras pettos* Quenst. sp., il *Tropidoceras masseanum* d'Orb. sp. , l' *Aegoceras submuticum* Opp. sp. sono più propri delle porzioni basse del Lias medio, sebbene non manchi chi indica le due ultime specie in istrati attribuiti al Lias superiore (1), ma che potreb-

(1) Meneghini, *Monographie des fossiles du calcaire rouge ammonitique (Lias supérieur) de Lombardie et de l' Apennin centrale;* Milan, 1867-81. (Paléontologie lombarde ecc.)

bero appartenere forse alla parte elevata del Lias medio. L'*Aegoceras* (*Liparoceras*) *Bechei* Sow. sp. e l'*Harpoceras Flandrini* Dum. sp. sogliono presentarsi nelle zone medie del Lias medio; nondimeno il primo è indicato dal Meneghini [*Amm.* (*Aegoceras*) *striatus* apud Meneghini] nell'opera qui avanti citata come trovato nei calcari di Bicicola (Lombardia), da lui riferiti al Lias superiore, ma che pure possono essere delle porzioni alte del medio. L'*Harpoceras Kurrianum* Opp. sp., l'*Harp. Algovianum* Opp. sp. e il *Rhacophyllites nimatense* d'Orb. sp. si raccolgono solitamente nella parte superiore del Lias medio. L'ultima specie ora citata è indicata anche nel Lias superiore dell'Appennino (Cagli) dallo Zittel (1), e il Meneghini la menziona insieme con l'*Harp. Algovianum* Opp. sp. in istrati del così detto rosso ammonitico lombardo da lui ritenuti come rappresentanti del Lias superiore, ma che, come si è detto potrebbero, *Al*meno in parte, non esser tali. È da notare tuttavia che l'*Harp. algovianum* Opp. sp. fu notato anche nel Lias superiore di Taormina dal prof. Seguenza; ma ivi non c'è di certo (2). Il *Phylloceras Partschi* Stur. sp. e il *Rhacophyllites libertum* Gemm. passano dal Lias inferiore sino al superiore, e il *Belemnites paxillosus* Schloth. si raccoglie in tutti i livelli del Lias medio. Il *Lytoceras Čžižeki* v. Hauer sp. non è a Hierlatz, secondo scrive il Geyer (3), perchè gli esemplari di quella regione così determinati da v. Hauer appartengono a un'altra specie; però esso è indicato nel Lias medio dell'Appennino centrale (Canavari) e in calcari dell'Italia settentrionale (v. Hauer, Meneghini) finora posti nel Lias superiore, ma pei quali bisogna far le riserbe che ho cennato avanti. Per queste ragioni il *L. Čžižeki* è lungi dal poter fare determinare con la sua presenza una zona geologica. Infine l'*Arietites* cfr. *tardecrescens* v. Hauer, che si racco-

(1) Zittel, *Geologische Beobachtungen aus den Central-Apenninen*; München, 1869 (Geognostisch-paläontologische Beiträge ecc.)

(2) Schopen, *Sul Toarsiano, Dogger e Malm dei dintorni di Taormina*, 11; Palermo, 1886.

(3) Geyer, Ueber die liasischen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstatt; Wien, 1886 (Abhandl. d. k. k. geol. R. A., XII Bd.)

glie sulla Montagnola di S. Elia presso Palermo, è di determinazione troppo dubbia, perchè possa qui venir considerato.

Se si tien conto di questi cefalopodi, sia nel loro insieme, al che si è facoltati dalle intime relazioni che legano il Lias medio della provincia di Palermo a quello di Galati e di Castelluccio, sia divisi secondo i luoghi che li forniscono, non si possono trarre dunque sicuri elementi per la determinazione della zona alla quale appartengono i calcari con crinoidi esaminati.

È necessario perciò di dare nello studio di questi strati una maggiore importanza ai gasteropodi, ai pelecipodi e soprattutto, pel loro forte predominio, ai brachiopodi.

Pertanto i calcari del Lias medio della provincia di Palermo (montagnola di S. Elia, Chiusa-Sclafani, Sant' Anna) sopra un insieme di 63 specie ne hanno 23 comuni col noto deposito di Hierlatz, che, secondo l'opinione dell'Oppel (1), ora confermata dal Geyer (2), rappresenta una porzione elevata del Lias inferiore; 2 con quello di Sospirolo; 3 col Lias inferiore della Selva Baconica; 5 con la parte assai elevata del Lias inferiore di Taormina e 5 col calcare cristallino del Lias inferiore della provincia di Palermo. Quelli dei dintorni di Galati (Rocche rosse sul M. Ucina) sopra 127 specie (3) ne hanno 34 comuni col Lias inferiore, delle quali 24 con quello di Hierlatz, 4 col calcare cristallino del Lias inferiore della provincia di Palermo, 4 col deposito di Sospirolo, 6 col Lias inferiore della Selva Baconica e 5 col Lias inferiore di Taormina. Quelli del piccolo promontorio di Castelluccio presso Taormina sopra 51 specie ne hanno 23 comuni col Lias inferiore, delle quali 14 sono a Hierlatz, 3 a Sospirolo, 4 nel Lias inferiore di Taormina, 6 in

(1) Oppel, *Ueber das Alter des Hierlazschichten*, *1862* (N. Jahrb. f. Min. ecc, pag. 59.)

(2) Geyer, *Op. cit.*, pag. 272.

(3) Alle specie di Galati enumerate avanti se ne bisognano aggiungere, oltre ai 31 cefalopodi nuovi descritti dal prof. Gemmellaro, molte altre nuove ancora non pubblicate, che si conservano nel Museo geologico dell' Università di Palermo, cioè 1 *Speriferina*, 2 *Terebratula*, 1 *Waldheimia*, 4 *Rhynchonella*, 3 *Lima*, 1 *Carpenteria*, 1 *Eunema*, 2 *Chrysostoma*, 8 *Trochus*, 3 *Neritopsis*, 3 *Discohelix*, 1 *Eulima ?*, 2 *Chemnitzia*, 1 *Cerithium ?*. Così il numero delle specie del Lias medio di Galati sale a 127.

quello della Selva Baconica e 2 nel calcare cristallino del Lias inferiore della provincia di Palermo. (1)

La massima parte delle specie delle tre faune ora notate sono o speciali di esse o di strati del Lias medio delle Alpi, dell'Appennino e della Spagna, mentre solo un ristretto numero (che in parte si presentano anche nell'Appennino e nelle Alpi) sono di quelle che hanno un grande sviluppo o il proprio giacimento nel Lias medio estralpino (*Sp. rostrata* Schloth sp., *Sp. Münsteri* Davids. sp., *Sp. Davidsoni* Deslongc., *Rh. serrata* Sow sp., *Rh. tetraedra* Sow. sp., *Rh. rimosa* v. Buch sp., *Rh. furcillata* Theod sp., *T. punctata* Sow.). Taluna di queste passa anche nel Lias superiore. La *Rh. Dalmasi* Dum., menzionata ora per la prima volta nel Lias medio italiano, proviene da quello del bacino del Rodano ed è stata trovata recentemente nella Spagna (2); la *Ter. Aspasia* Mgh. è citata anche negli strati con *Hamm. fallax* di S. Vigilio (3).

Ora le faune del Lias medio eseminate qui sopra hanno, come si vede, esigui rapporti con le parti elevate di esso e col Lias superiore; invece mostrano grandi relazioni con l'inferiore e specialmente con quello di Hierlatz; sicchè gli strati della provincia di Palermo, cioè quelli della montagnola di S. Elia, di Chiusa-Sclafani e di S. Anna; quelli delle Rocche rosse di Galati e del promontorio di Castelluccio presso Taormina possono collocarsi nella parte inferiore del Lias medio.

Tale determinazione di età è confermata dal paragone di questi strati con i due livelli di calcari con crinoidi del Lias medio del M. San Giuliano. Infatti la fauna del livello inferiore corrisponde a quelle della provincia di Palermo, di Galati e di Castelluccio, con le quali ha 26 specie comuni sopra 34 e le stesse intime ana-

---

(1) Se al catalogo dei fossili del Lias medio di Castelluccio si aggiungono altre poche specie sinora indescritte (1 *Spiriferina*, 3 *Rhynchonella*, 3 *Waldheimia* e 2 *Harpoceras)* si avrà che quella fauna è rappresentata da 51 specie.

(2) Kilian, *Études paléontologiques sur les térrains sécondaires et tertiaires de l' Andalousie;* Paris 1889, (Mission d' Andalousie; Mem. de l'Acc. des Sciences ecc., T. XXX).

(3) Vacek, *Ueber die Fauna der Oolithe von Cap. S. Vigilio, 1886. (*Abhandl. d. k. k. geol. R. A., Bd. XII.)

logie col Lias inferiore di Hierlatz: mentre quella del superiore, pur legata strettamente con esse per l'identità del piano geologico, ne differisce per le sue relazioni molto minori col Lias inferiore e maggiori con le parti elevate del medio e col superiore.

Possiamo ora stabilire i rapporti delle faune siciliane con quelle di altri luoghi del bacino mediterraneo che possono servire al paragone per la loro *facies* a brachiopodi e per la sufficiente illustrazione ricevuta. I brachiopodi del Lias medio delle Alpi Valdesi e contrade circostanti illustrati dal dott. Haas (1) non possono fornire per ora sicuri elementi per la determinazione del loro livello geologico, perchè non sempre si hanno esatte notizie sugli strati che li contengono, e perchè evidentemente accompagnati da altri fossili che sarebbe necessario conoscere molto estesamente. Quelle faune, poste in una regione che serve da limite tra il bacino mediterraneo e quello dell'Europa centrale, hanno un carattere promiscuo di specie dei due bacini, e perciò sarebbe importantissimo poterle comprendere nel paragone che facciamo; ma, attendendo che oltre i brachiopodi ne siano illustrati del tutto gli altri fossili, è meglio non dare giudizj deffinitivi sulla minuta determinazione della loro età.

La fauna del Lias medio spagnuolo, largamente studiata dal Kilian (2), è citata negli elenchi promiscuamente a quella del Lias inferiore, sicchè il suo studio, per ora, non può servire al nostro scopo.

I depositi del Lias medio portoghese permettono in buona parte, pei cefalopodi che contengono, la loro divisione in zone corrispondenti a quelle del Lias dell' Europa centrale (3). Essi, posti come sono ai limiti dei due bacini, non contengono brachiopodi di ecclusivo tipo mediterraneo, e non sono adatti pel paragone con i calcari del Lias medio a *facies* di Hierlatz.

---

(1) Haas, *Étude monographique et critique des brachiopodes rhétiens et jurassiques des Alpes vaudoises* ecc, II, 1887 (Mèm. de la Soc. pal. suisse, T. XIV.)

(2) Kilian, *Op. cit.*

(3) Choffat, *Op. cit.*

Le poche specie che si conoscono del Lias medio dell'Untersberg (Salisburgo), citate del Gümbel (1) e dal Frauscher (2), accennano a una porzione elevata di quel piano; però pel loro ristretto numero non permettono delle conchiusioni sicure.

Per tutte queste ragioni ci limiteremo a stabilire dei paragoni con gli strati del Lias medio dei dintorni di San Cassiano (Tirolo meridionale), dell' Appennino centrale, di Gozzano (Prealpi piemontesi) e di Saltrio e Arzo (Prealpi lombarde).

Sulla fauna del Lias medio nel Tirolo meridionale hanno scritto il prof. M. Neumayr (3), il dott. E. Mojsisovics (4) e il prof. H. Haas (5), in modo che ora se n'ha una sufficiente cognizione; nondimeno le conchiusioni che trarremo dal suo studio è possibile che non abbiano un valore definitivo, perchè non è escluso che le specie, raccolte presso San Cassiano e nei distretti circostanti provengano da varî livelli liassici (il qual dubbio non è neanco rimosso dal recente lavoro del prof. Haas (6) su quelle contrade), e perchè la controversia che si è elevata tra il prof. C. F. Parona (7) e e il prof. Haas (8) sull' età degli strati con brachiopodi di Val-Tesino, tocca anche qualche specie compresa dal secondo nella fauna liassica di San Cassiano. Se pertanto si elimina da questa fauna la *Rh. belemnitica* Quenst. sp. perchè di dubbia determina-

(1) Gümbel, *Geognostische Beschreibung des bayerischen Alpengebirges und seines Vorlandes;* Gotha, 1861, pag. 495.

(2) Frauscher, *die Branchiopoden des Untersbergs bei Salzburg;* Wien, 1883 (Jahrb. d. k. k. geol. R. - A., 33 Bd.)

(3) Neumayr, *die Zone der T. Aspasia in den Südalpen*; Wien 1867 (Verhandl. d. k. k. geol. R. - A., N. 11.)

(4) Mojsisovics, *die Dolomit-Riffe von Südtyrol und Venetien ecc.*; Wien, 1879, pag. 285.

(5) Haas, *Beiträge zur Kenntniss der liasichen Brachiopodenfauna von Südtyrol und Venetien*; Kiel, 1884.

(6) Haas, *Ueber die Lagerungsverhältnisse der Juraformation im Gebirge von Fanis in Südtyrol* (Verhandl. d. K. K. geol. R. - A N. 17 ; 1887.)

(7) Parona *Sull' età degli strati a brachiopodi della Croce di Segan in Val Tesino*, 1885 (Proc. verb. della Soc. tosc. di Sc. Nat., 1 febb.)

(8) Haas, *Ueber die Brachiopodenfauna v. Südtyrol und Venetien*, 1884 (N. Jahrb. f. Min. ecc., briefliche Mittheil., 1 Bd. 1885)—*Bemerkungen bezüglich der Brachiopodenfauna von Castel-Tesino*, 1886 Verhandl. d. K. K. geol. R -A.)

zione e difficilmente separabile dalla *Rh. Briseis* Gemm. (*Rh. variabilis* Schloth.); la *Rh. Zitteli*, perchè nessuno degli esemplari rappresentati nelle " *Beiträge z. Kenntn. d. lias Brach.—F. in Südtyrol* ecc. „ corrisponde agl'individui originali della specie del prof. Gemmellaro; la *Wald. Hertzi* Haas, perchè identica con la *Wald.* cfr. *Cadomensis* di Castel Tesino pubblicata dal prof. Parona (1) e sicuramente trovata in istrati con *Harp. opalinum* alla Malga Tasula (2) (Tirolo); la *Rh. Suetii* Haas trovata pure nella stessa località, e che insieme a quella ora citata non lascia perciò sicuri della sua provenienza nella fauna liassica di San Cassiano; si riunisce alla *Rh. plicatissima* Quest. sp. la *Rh. hungarica* Böck; la *Wald. oxygonia* Haas non Uhl. alla *Wald. securiformis* Gemm. e la *Wald. linguata*, var. *major* Haas non Böck alla *Wald. Rothpletzi* Di-Stef. (*Wald. Haas* Rothpl.), che si presenta nel livello basso del Lias medio del M. San Giuliano, si avrà pel deposito di San Cassiano un insieme di 30 specie. Di queste 12 sono comuni col Lias inferiore in generale, e fra di esse 8 si raccolgono a Hierlatz, 5 a Sospirolo e 5 nel Lias inferiore della Selva Baconica: per questo i rapporti di tale fauna col Lias inferiore non sono maggiori di quelli delle faune basse del Lias medio siciliano, e non c'è quindi nessuna sufficiente ragione per non collocarla in quest'ultimo piano. Essa va aggregata ai così detti calcari con *T. Aspasia* di Sicilia, con i quali ha 16 specie comuni, però con la porzione antica di essi, della quale possiede 11 specie (*Sp. rostrata* Schloth sp., *Sp. brevirostris* Opp., *Rh. retusifrons* Opp., *Rh. Briseis* Gemm., *Rh. flabellum* Mgh., *Rh. cfr. Reynesi* Gemm., *T Aspasia* Mgh., *T. rudis* Gemm., *T. Taramelli* Gemm., *Wald. securiformis* Gemm., *Wald. Rothpletzi* Di-Stef.) e della quale ha gli stessi intimi rapporti col Lias inferiore e le insufficienti relazioni con le parti elevate del Lias medio e col superiore. Se, per conferma, si paragona la fauna di San Cassiano con quella del Lias

(3) Parona e Canavari, *I brachiopodi oolitici di alcune località dell'Italia settentrionale;* Pisa, 1882 (Atti della Soc. tosc. di Scin Nat., vol. V.)

(1) Finkelstein, *Ueber ein Vorkommen der Opalinus — (und Murchisonae ?)—Zone im westlichen Süd-Tirol, 1889* (Zeitsr. d. deutsch. geol Gesellschaft Bd. XLI.)

medio del M. San Giuliano, si vede che le sue maggiori analogie sono con la più bassa, che, come essa, è molto vicina al Lias inferiore, mentre si discosta da quella del livello superiore, con la quale ha solo 2 specie comuni.

La fauna a brachiopodi del Lias medio dell' Appennino centrale è stata ampiamente illustrata dallo Zittel (1), dal Canavari (2) e dal Parona (3). Dai loro scritti si trae che i fossili, prevalentemente raccolti nella parte superiore di quei calcari (Canavari), provengono da varj luoghi spesso molto lontani fra di loro [Campo delle Monnece presso Gagliole; Campi dell' Acqua presso Ficano; Precicche, M. della Rossa, M. Rocchetta nel gruppo del Suavicino; M. Gualdo presso Camerino; Cagli; tra Cagli e Cantiano; Marconessa presso Cingoli; M. Catria, Passo-del-prete presso il Catria; Foci di Cantiano tra M. Petrano e M. Tenetra; M. Pietralata (Furlo), Monticelli, Subasio, M. Soratte, Papigno presso Terni, Grotta del miele e Val Mirandola presso Cesi ecc.]. Dippiù si vede che le specie non sempre sono state raccolte in posto dai valenti studiosi che le hanno illustrate, ma non di raro da corrispondenti; sicchè è possibile che involontariamente si siano confusi fossili di varj livelli liassici ben determinati.

L' esistenza di varj livelli di calcari a brachiopodi nel Lias medio dell' Appennino centrale è certo probabile, molto più che quel piano vi raggiunge una potenza superiore ai cento metri (Canavari), e sarebbe quindi utilissimo fare ricerche estese e minute nelle singole località. Tuttavia, compilando sui lavori degl'illustratori di quelle faune delle liste di specie divise secondo i luoghi studiati, potremo tentare delle conchiusioni.

---

(1) Zittel, *Op. cit.*

(2) Canavari, *La montagna del Suavicino ecc.* 1880. (Bull. del R. Com. geol. d'Italia.— *I brachiopodi degli strati a T. Aspasia Mgh. nell'Appennino centrale*, 1880 (Atti dell'Acc. dei Lincei, vol. VIII)— *Alcuni nuovi brachiopodi degli strati a T. Aspasia Mgh. nell'Appennino centrale*, 1881 (Atti della Soc. tosc. di Sc. Nat., vol. V.)— *Contribuzione III alla conoscenza dei brachiopodi degli strati a T. Aspasia Mgh. nell'Appennino centrale*, 1883 (Atti della Soc. tosc. di Sc. Nat., vol. VI).

(3) Parona, *Contributo allo studio della fauna liassica dell' Appennino centrale*, 1883 [in Verri, *Studi geologici sulle conche di Terni e di Rieti* (presso gli Atti dell'Acc. dei Lincei)].

Per venire a queste non terremo conto dei cefalopodi, perchè essi, contrariamente a quanto accade in generale, non hanno molto peso nei nostri calcari con crinoidi del Lias medio per stabilire minute determinazioni di età, e la loro presenza o mancanza non altera, come è stato detto, le conseguenze che possono trarsi dall' esame degli altri resti fossili. Inoltre è da notare che sulla provenienza di questi cefalopodi dell' Appennino si rimane dubbiosi, perchè, sebbene dalle indicazioni dello Zittel (*Op. cit.*) e del Canavari (*La montagna del Suavicino ecc.*) sembra che essi per lo più siano stati raccolti insieme ai brachiopodi, tuttavia poi il prof. Canavari esprime l'opinione che, in parte almeno, appartengano ipoteticamente a un livello inferiore a quello della fauna di brachiopodi (*I brachiopodi degli strati a T. Aspasia* ecc., pag. 6), e il prof. Parona invece scrive (*Contributo allo studio della fauna liassica* ecc., pag. 93) che i calcari del Lias medio con *facies* di cefalopodi nell' Appennino centrale (almeno pei luoghi studiati da lui e dal Verri) si stendono sopra quelli con *facies* di brachiopodi. Per queste ragioni fonderemo le nostre conchiusioni sui brachiopodi e sui rari crinoidi determinati, tralasciando qualche altro fossile specificamente indeterminato o di poca importanza.

Se dopo un breve esame delle specie dell'Italia centrale citate sinora (1), compiliamo gli elenchi delle specie dei varj luoghi fossi-

(1) Alla fauna del Lias medio dell'Appennino centrale, come fu riportata dal prof. Zittel e dal prof. Canavari ne' suoi tre primi lavori, bisogna fare quelle aggiunzioni e rettificazioni indicate dallo stesso Canavari nella sua « *Contribuzione III alla conoscenza dei brachiopodi* ecc. », e dal prof. Parona nel « *Contributo allo studio della fauna liassica* ecc. », fra le quali è importante la radiazione della *Sp. Meneghininiana* Can. e della *Sp. Tonii* Can. di provenienza e di età mal sicure. Dippiù è necessario togliere dal numero delle specie di quella fauna la *Sp. cantanianensis* Mgh., che è identica con la *Sp. rostrata* Schlotb. sp., perchè il carattere dei tubercoli, indicato come speciale della superficie della *Sp. cantanianensis*, si riscontra anche su esemplari della specie dello Schlotheim; la *Sp. undata* Can., perchè sembra identica alla *Sp. alpina* Opp.; la *Rh. variabilis* Sclotb., perchè gl'individui così determinati appartengono a due specie differenti dalla *Rh variabilis* (=*Rh. Briseis* Gemm.), e la *Rh. deltoidea* Can., che sembra identica alla *Rh. Zisa* Opp. degli strati di Klaus, essendo la minor convessità dell'individuo dell' Appennino rispetto a quella delle figure di Oppel (*Ueber das Vorkommen von jurassischen-Posidonomyen - Gesteinen in den Alpen*, pag. 210, tav. 6 fig. 7) dentro i limiti di

liferi studiati in quella regione, ci accorgeremo che non tutti offrono tale numero o qualità di fossili da permettere che si traggano conchiusioni sicure dal loro studio; però la massima parte delle faune offrono degli elementi che, convenientemente interpetrati, possono condurre a risultati accettabili. Quelle dei Campi dell'acqua presso Ficano e del M. della Rocchetta nel Suavicino, della Marconessa presso Cingoli, delle Foci di Cantiano tra M. Petrano e M. Tenetra, del M. Pietralata (Furlo), di Monticelli presso Roma, di Papigno presso Terni e della Grotta del miele presso Cesi, che pel numero dei loro fossili possono studiarsi con utile, sono intimamente legate dalla comunanza dalla massima parte delle loro specie. I loro brachiopodi sono quasi tutti speciali dell' Appennino e in piccola parte comuni ai così detti calcari con *T. Aspasia* della Sicilia e delle Alpi. Sopra un insieme di 69 specie queste località ne hanno 8 sicuramente determinate comuni col Lias inferiore, delle quali ce

---

variabilità di questa specie, secondo traggo dall'esame di molti esemplari della *Rh. Zisa* Opp., raccolti nei calcari con *P. alpina* (Klausschichten) di Sicilia. Inoltre è da fare lo stesso per la *Rh. Mariottii* Can. non Zittel del M. Suavicino e della Marconessa presso Cingoli, perchè essa non appartiene alla specie dello Zittel; invece l' esemplare della tav. IV, fig. 2 (*Rh. Mariottii*). del lavoro del prof. Canavari. « *I brachiopodi degli strati a T. Aspasia* ecc. » pare assai vicina alla *Rh. polymorpha* Opp. degli strati di Klaus ed è, pei caratteri della fronte, certamente differente dalla *Rh. Mariottii* Zitt ; quello della tav. IV, fig. 3 [della stessa opera potrebbe forse considerarsi come giovane della *Rh. variabilis* Mgh. non Schloth. var. *laevis* Mgh , che ha però il tipo delle *Rhynchonella* lisce del Dogger. C'è ancora da notare che la *T. fimbrioides* Can. non Deslongc. del M. Pietralata (Furlo), rappresentata nella tav. 11, fig. 1 dei *Brachiopodi degli strati a T. Aspasia Mgh. ecc.* non potrebbe separarsi dalla *T. Renier* Cat., mentre quella della fig. 2 è la *T. Rotzoana* Schaur.; che la *T. hypotycha* Can. (*Contribuzione III* ecc., pag. 17, tav. X, fig. 1) pare non differisca dalla *T. fimbrioides* Deslongc.; che la *T.* sp. ind. cfr. *T. sphenoidalis* Mgh. della Rocchetta (Suavicino) riportata dal prof. Canavari nella *Contribuzione III* ecc. è da riunire con grande probabilità alla *T. sphenoidalis* Mgh. apud Gemm., e che la *T sphenoidalis* Mgh. apud Canavari (*I brachiopodi degli strati a T. Aspasia* ecc. pag. 14, tav. 11, fig. 5, 6.) sembra fondata su individui giovani della *T. punctata* Sow., come moltissimi se ne osservano in Sicilia e sulle Alpi. Alla *T. punctata* possono aggregarsi con certezza gl'individui che il Canavari cita con dubbio.

Questo breve esame, reso necessario dal bisogno di fare un computo esatto della fauna di brachiopodi del Lias medio appenninico, così estesamente e splendidamente illustrata specialmente dal prof. Canavari, fa valutare in tutto le specie che si raccolgono sui monti della Rocchetta nel Suavicino, alle Precicche, alla Marconessa (Cingoli), alle Foci di Cantiano, al M. Pietralata (Furlo), a Monticelli, a Papigno, alla Grotta del Miele a 70, salvo errore.

ne sono a Hierlatz 7, a Sospirolo 2, nel Lias inferiore della Selva Baconica 3 e in quello di Taormina 2; sicchè siamo lontani dal trovarvi quelle strette analogie col Lias inferiore che distinguono la massima parte delle faune a brachiopodi del Lias medio di Sicilia. Invece in talune di esse (Marconessa presso Cingoli, M. Pietralata nel Furlo) si raccolgono la *T. Renieri* Cat. e la *T. Rotzoana* Schaur; che per le relazioni che indicano col Lias superiore e con la parte elevata del Lias medio, le fanno porre in una porzione recente di questo piano. A tali condizioni bisogna aggiungere quelle date dal loro posto stratigrafico elevato nella massa degli strati del Lias medio appenninico (Canavari) e dalle relazioni di alcune loro specie con altre del Dogger, come sono la *Rhynchonella* sp. = *Rh. variabilis* Mgh. non Schloth. var. *laevis* Mgh., che richiama la *Rh. coarctata* Opp.; la *Rh. dolabriformis* Mgh., che ricorda la *Rh. orthoptycha* Opp.; la *Rh. Meneghinii Zitt.*, che ha relazione con la *Rh. brentoniaca* Opp. ecc.

Questa determinazione di età, da tempo messa bene in chiaro dal prof. Canavari, è confermata dal paragone delle faune menzionate con quelle dei due livelli di calcari con crinoidi del M. San Giuliano. Infatti quello che per la presenza della *T. Rotzoana* Schaur., per le relazioni con la porzione elevata del Lias medio e gli esigui rapporti col Lias inferiore corrisponde con esse è precisamente il livello superiore, nonostante che abbia comuni con queste faune solo poche specie (*Sp. rostrata* Schloth. sp., *T. punctata* Sow., *T. sphenoidalis* Mgh. apud Gemm., *T. Rotzoana* Schaur.). Tali caratteri delle faune appenniche citate non si riscontrano invece nelle altre siciliane, che pur tuttavia hanno con esse molte specie comuni (*Sp. rostrata* Schloth. sp., *Rh. flabellum* Mgh. *Rh., Sordellii* Par., *Rh. Mariottii* Zitt, *T. Aspasia* Mgh., T. *cornicolana* Can., T. *sphenoidalis* Mgh. apud Gemm., T. *Taramellii* Gemm. *T. Piccininii* Zitt., *Wald. mutabilis.* Opp., *Wald. furlana* Zitt., var. *elongata* Mgh., *P. Stoliczkai* Gemm.)

La fauna del M. Soratte (Roma), per quanto poco conosciuta, sembra di occupare nel Lias medio un posto bassso, malgrado le sue relazioni con quelle dell' Appennino esaminate sopra. Delle

sue 5 specie [*Sp. rostrata* Schloth. sp., *Sp. alpina* Opp. (= *Sp. undata* Can.), *Rh. pectiniformis*, *Rh. Rusconii* Can., *Wald. mutabilis* Opp.] tre sono comuni col Lias inferiore, mentre nessuna è di quelle che indicano valevoli relazioni con la parte elevata del Lias medio o col superiore. Per queste ragioni la fauna del M. Soratte deve porsi nella porzione inferiore del Lias medio, finchè una estesa raccolta di fossili non modifichi eventualmente queste conclusioni.

Il Lias medio di Gozzano nelle Prealpi piemontesi è stato illustrato da un importante lavoro paleontologico del prof. C. F. Parona (1). Tenendo conto delle aggiunzioni e delle rettificazioni pubblicate più tardi dallo stesso autore (2) e da poche altre che è possibile fare (3), si ha per la fauna di quel luogo un insieme di 43 specie, non computando un *Lepitodus*, un *Pentacrinus* e un *Cidaris* indeterminati. In essa le specie comuni col Lias inferiore possono valutarsi a 12, delle quali solo 7 sono comuni col deposito di Hierlatz, 2 col calcare di Sospirolo, 2 con quello della Selva Baconica e 2 con quello cristallini della provincia di Palermo; però la presenza della *Gryphaea arcuata* Lmk., le manchevoli relazioni con le porzioni elevate del Lias medio e col superiore, nonchè i suoi intimi rapporti con le faune antiche del Lias medio di Sicilia, con le quali ha comuni 16 specie (*Sp. rostrata* Schloth. sp., *Sp. sicula* Gemm., *Sp. angulata* Opp., *Sp. Münsteri* Davids., *Rh. tetraedra* Sow. sp, *Rh.*

---

(1) Parona, *Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili*, Roma, 1880 (Atti dell'Acc. dei Lincei, vol. VIII).

(2) Parona, *Contributo allo studio della fauna liassica dell'Appennino centrale*, pag. 94.— *Valsesia e lago d'Orta;* Milano, 1886 (Atti della Soc. ital di Sc. Nat, vol. XXIX) pag. 102.

(3) La *Rh. Calderinii* Par. mi pare che non possa separarsi dalla *Rh. Briseis* Gemm. (*Rh. variabilis* Schloth.), nè la *Rh. discoidalis* Par. dalla *Rh. serrata* Sow.; la *Rh. Zitteli* di Gozzano, figurata dal prof. Parona, non corrisponde agl' individui originali della *Rh. Zitteli* Gemm., che ho potuto studiare nel Museo geologico della Università di Palermo; ma potrebbe esser riguardata come una varietà multicostata della *Rh. Briseis*, simile a quelle che il sig. Geyer figura nella tav. V della sua opera più volte citata. La T. cfr. *Andleri* Opp. è da riferire a una nuova *Waldheimia*; la *Wald.* cfr *Ewaldi* riportata dal Parona sembra identica con la *Wald.* sp. ind. cfr. *Ewaldi* di Arzo (Parona, *Ibrachiopodi liassici di Saltrio* ecc.; pag. 259, tav. V fig. 15), che per la gonfiezza è differente dalla *Wald. Ewaldi* Opp.

Briseis Gemm., *Rh. Sordellii* Par., *Rh. serrata* Sow. sp., *Rh. flabellum* Mgh., *T. punctata* Sow., *T. sphenoidalis* Mgh. apud Gemm., *T. Taramellii* Gemm., *T. Aspasia* Mgh., *Wald. Ewaldi* Opp., *W. cfr. subnumismalis* Davids., *P. Stolizckai* Gemm.), forzano a porla in una porzione bassa del Lias medio, come di già ha ben dimostrato il prof. Parona. Le relazioni del Lias medio di Gozzano sono del resto piccole con quelle elevate dell'Appennino (8 specie comuni) e col livello superiore di calcari con crinoidi del M. San Giuliano (7 specie comuni.)

Per quanto riguarda il Lias medio di Saltrio e Arzo nelle Prealpi lombarde, tanto bene studiato dal prof. Parona (1), notiamo prima di tutto che sebbene può riguardarsi come tipica pel massimo numero di specie la fauna di Arzo, non è necessario di esaminare a parte quella di Saltrio, perchè così intimamente legata con la prima da non potersene staccare.

Se consideriamo come appartenente alla *Wald. Ewaldi* Opp. la *Waldheimia* f. n. che il Parona figura nella tav. V, fig. 16, 17 del lavoro citato sotto, e come una varietà della *Rh. Brisei* Gemm. la *Rh.* cfr. *Zitteli* Gemm. di Arzo, perchè vicinissima a questa e differente dalla *Rh. Zitteli* Gemm. di Sicilia, avremo nella fauna studiata un insieme di 28 specie, delle quali solo 9 sono comuni col Lias inferiore, e che si presentano 5 in quello di Hierlatez, 1 in quello ad Arietiti dell'Italia centrale, 2 in quello del Bacino del Rodano e 1 in quello dell'Europa centrale. Siccome fra queste specie poche sono quelle che hanno il massimo sviluppo nel Lias inferiore, possono riguardarsi come molto esigui i rapporti della fauna di Saltrio e Arzo col Lias inferiore; sicchè si sarebbe condotti a porla in una porzione elevata del Lias medio. Tuttavia è da considerare che essa non ha forti relazioni col livello superiore di calcari con crinoidi del M. San Giuliano, nè con le faune elevate dell'Appenino centrale, nè, quel che è più, con altri strati

(1) PARONA, *I brachiopodi liassici di Saltrio e Arzo nelle Prealpi lombarde;* 1884. (Mem. del R. Istituto lombardo.)

superiori del Lias medio in generale e col superiore; ma che invece ha molti rapporti con quella di Gozzano (10 specie comuni) e perciò con quelle basse siciliane. Per queste ragioni deve ritenersi che la fauna di Saltrio e Arzo occupa la parte media del Lias medio.

Infine è da notare, il che abbiamo anche accennato avanti, che taluni dei livelli di calcari con crinoidi dell'Italia superiore, specialmenti quelli di Arzo, Besazio e della Bicicola di Suello (Lombardia), contenenti la *T. Aspasia* Mgh., la *T. Renieri* Cat., la *T. Rotzoana* Schaur. e la *T. erbaensis* Suess, sono probabilmente gli equivalenti dei livelli elevati del Lias medio del M. San Giuliano (Trapani) e dell'Appennino centrale, e ciò pei caratteri della loro fauna e per la posizione stratigrafica di alcuni che sono immediatamente inferiori al Lias superiore, come quelli di Besazio (Spreafico (1) e della Bicicola (2). Del resto il prof. G. Meneghini (3) aveva fatto notare le intime relazioni del giacimento della Bicicola col Lias medio e la mancanza in esso dei tipi più frequenti e caratteristici del Lias superiore. La fauna di questa località ha invero l'impronta del Lias medio, molto più che la massima parte delle sue specie ritenute comuni col Lias superiore sono tali col calcare detto *Medolo*, almeno per parte del quale il Reynès (4) e lo Zittel (5) hanno espresso l'uno la certezza e l'altro il dubbio che si tratti di Lias superiore.

***

§ 2. — I sincronismi indicati nel paragrafo precedente non sono punto assoluti, nè l'aggruppamento delle varie faune in una parte inferiore e in una superiore del Lias medio può essere pre-

(1) Taramelli, *Il Canton Ticino meridionale ed i paesi finitimi*, Berna, 1880.

(2) Parona, *Note paleontologiche sul Lias inferiore delle Alpi lombarde*, 1889 (Rendiconti del R. Ist. lomb., S. II, vol. XXI).

(3) Meneghini, *Paragone paleontologico dei vari lembi del Lias superiore in Lombardia* (Atti dell'Acc. dei Lincei, II, S. II, 1875) pag. 631. — *Monographie du calcaire rouge ammonitique* ecc., pag. 222.

(4) Reynès, *Essai de géologie et de paléontologie aveyronnaises;* Paris, 1868.

(5) Zittel, *Op. cit.*

cisato da una linea netta di divisione. I nostri calcari con crinoidi e brachiopodi esaminati sono dei depositi per lo più lenticolari, formati sotto determinate condizioni locali, intercalati ad altezze varie o eguali nella massa dei calcari più o meno compatti o subcristallini del Lias medio, perchè rappresentano dei momenti contemporanei o successivi di formazione. Può infatti eseguirsi negli strati che abbiamo esaminato uno smembramento più minuto, se si tien conto contemporaneamente della proporzione centesimale di fossili del Lias inferiore nelle loro faune e della presenza o assenza di specie che indicano valevoli relazioni con le parti elevate del Lias medio e col superiore. S'intende che al primo di questi criteri non può darsi un valore ristretto e assoluto, perchè la proporzione di specie del Lias inferiore può variare fra larghi limiti, determinati dallo estendersi delle investigazioni paleontologiche, dal modo di comprendere le specie e dalle condizioni locali sotto le quali si formarono i depositi; tuttavia, siccome le faune sulle quali abbiamo discorso hanno ricevuto una sufficiente illustrazione, l'applicazione del criterio della proporzione centesimale di specie del Lias inferiore assai largamente inteso, ma sempre tale da servire a distinguere livelli e non piani, può essere utile.

Pertanto, se per conferma delle idee esposte in questo lavoro, si vuol fare il tentativo di una suddivisione più precisa dei vari livelli di calcari con crinoidi del Lias medio mediterraneo, si dovranno riguardare come più antichi gli strati inferiori del M. San Giuliano, quelli di Chiusa-Sclafani, di Sant'Anna di Giuliana e della Montagnola di S. Elia (Palermo), di Castelluccio (Taormina) e dei dintorni di San Cassiano (Tirolo), nei quali la proporzione centesimale di specie comuni col Lias inferiore va dal 37 al 50 per cento (essendo pei primi 50 %, pei secondi 43 %, pei terzi 37 %, pei quarti 47 %, per la quinta 43 %, per la sesta 38 %,) e non si notano specie che possano farli collocare in una porzione elevata del Lias medio. La fauna delle Rocche rosse di Galati di Tortorici (Messina) è intimamente legata con quest' ultime, delle quali possiede 28 specie, ed è abbondante di tipi di Hierlatz; non-

dimeno essa ha un così grande numero di specie proprie, e una proporzione centesimale di fossili del Lias inferiore (30 °/o) così piccola rispetto a quella delle altre citate sopra, che potrà considerarsi come leggermente più giovane.

Accanto a quello di Galati potrà collocarsi il Lias medio del M. Soratte (Roma), nel qual piano a dir vero, è assai forte la proporzione centesimale delle specie comuni col Lias inferiore (60 °/o); però la certezza che la fauna di quegli strati è assai incompletamente nota e gl' intimi rapporti che essa ha con le faune elevate del Lias medio dell'Appennino centrale, mentre da un canto danno carattere di provvisorietà alle conchiusioni che se ne possono trarre, fanno sospettare più strette relazioni con le porzioni alte del Lias medio, e permettono, per ora, di porla in un livello più elevato di quelle della provincia di Palermo, di S. Cassiano ecc.

La fauna di Gozzano (Piemonte) è, come fu detto, strettamente legata a quelle basse siciliane, e manca di specie che possono farla porre nella parte superiore del Lias medio; però le sue relazioni col Lias inferiore non sono forti (il 28 °/o di specie comuni), nonostante la presenza della *Gryphaea arcuata* citata dal Parona; sicchè potrà riguardarsi come più elevata delle faune esaminate poco avanti. In un posto leggermente più alto, ossia nella parte media del Lias medio, potrà mettersi la fauna a brachiopodi di Saltrio e Arzo (Lombardia), per le ragioni esposte a pag. 27 (1).

Fra i calcari della parte superiore del Lias medio, quelli del livello alto del M. San Giuliano potranno riguardarsi come i più antichi, perchè le loro relazioni col Lias inferiore sono discretamente forti (37 °/o di specie comuni). Quelli dell' Appennino centrale sono certo un po' più elevati, ma non tutti nello stesso grado. Infatti le piccole faune della Marconessa presso Cingoli e del M. Pietralata (Furlo) sono distinte dal resto per la presenza di due importanti specie (*T. Rotzoana* Schaur., *T. Renieri* Cat.), che molto

(1) Non è improbabile che occupi lo stesso posto quella zona di calcari compatti che al M. San Giuliano separa i due livelli di calcari con crinoidi, e che per la sua povertà di fossili non fa emettere giudizj sicuri per la determinazione del livello.

le avvicinano al Lias superiore. Le altre, in generale più abbondanti di fossili, cioè quelle dei Campi dell' acqua presso Ficano (Suavicino), dei monti della Rocchetta (Suavicino), delle Foci di Cantiano, di Papigno (Terni), della Grotta del Miele (Cesi), di Monticelli nei monti Cornicolani, che sono le meglio studiabili, tengono un posto intermedio tra le prime due (Marconessa e M. Petralata) e quella del livello elevato del M. San Giuliano, perchè, non solo mancano delle due specie menzionate ora, ma ne mostrano qualcuna, come la *Sp. obtusa* Opp. (Monticelli), una *Spiriferina* molto affine alla *Sp. Pichleri* Neum. (Foci di Cantiano), la *Sp. alpina* Opp. = *Sp. undata Can.* (Papigno, Grotta del Miele, Monticelli) e la *Wald. mutabilis* Opp. (Foci di Cantiano, Monti della Rocchetta), che danno loro un carattere di antichità maggiore di quello delle faune del M. Pietralata e della Marconessa, ma sempre minore di quello del livello superiore del M. San Giuliano, che ha più specie del Lias inferiore. Intanto bisogna riconoscere che le ricerche più estese e particolari nelle singole località fossilifere del Lias medio dell' Appennino centrale sono necessarie per assodar meglio questo modo di vedere.

Accanto agli strati più alti del Lias medio appenninico potranno porsi i calcari con crinoidi e *T. Aspasia*, *T. erbaensis*, *T. Renieri*, *T. Rotzoana* ecc. di Arzo, Besazio e della Bicicola di Suello (Lombardia), ma con un segno dubitativo, finchè uno studio più esteso delle loro faune non avrà del tutto assodato la loro spettanza alla porzione più alta del Lias superiore.

I risultati di questo tentativo di ordinamento dei calcari con crinoidi e brachiopodi meglio conosciuti del Lias medio mediterraneo potranno osservarsi sinteticamente nel quadro che segue:

CALCARI DEL LIAS MEDIO

Parte Superiore

M. Pietralata (Furlo); Marconessa—(Calc. con *T. Renieri* ecc. di Arzo, Besazio, Bicicola di Suello)?
Campi dell'Acqua; M. della Rocchetta; Foci di Cantiano; Papigno; Grotta del Miele; Monticelli.
M. San Giuliano, liv. sup..

Saltrio e Arzo.

Parte Inferiore

Gozzano.
Rocche rosse di Galati; (M. Soratte)?
M. San Giuliano, liv. inf.; Chiusa-Sclafani; Sant'Anna di Giuliana; M. di S. Elia; Castelluccio; S. Cassiano.

PARTE PALEONTOLOGICA

BRACHIOPODA

Gen. Spiriferina d' Orbigny

Spiriferina alpina Opp.

1861. *Spiriferina alpina* Oppel, Ueber die Brachiopoden des unteren Lias (Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellschf., XIII Bd.) pag. 541, tav. XI, fig. 5.
1879. „ „ Neumayr, Zur Kenntniss der Fauna des untersten Lias in den Nordalpen (Abhandl. d. k. k. geol. R. A., VII Bd.) pag. 9, tav. I, fig. 4.
1883. „ „ Canavari, Contribuzione III alla conoscenza dei brachiopodi degli strati a *T. Aspasia* Mgh. nell' Appennino centrale (Atti della Soc. tosc. di Sc. Nat., vol. VI) pag. 78, tav. IX, fig. 3.
1883. „ *undata* Canavari, Ibid., pag. 80, tav. IX, fig. 4.
1885. „ *alpina* Haas, Étude monographique et critique des brachiopodes rhétiens et jurassiques des Alpes vaudoises, (Mém. de la Soc. paleont. suisse, XI) pag. 27, tav. II, fig. 8, 10.
1886. „ *compressa* Seguenza, Le Spiriferina dei varii piani del Lias messinese (Boll. della Soc. geol. ital. vol. IV) pag. 457, tav. XX, fig. 6.
1886. „ *tauromenensis* Seguenza, Ibid., pag. 458, tav. XX, fig. 7.
1886. „ *alpina* Rothpletz, Geologisch-palaeontologische Monographie der Vilser Alpen ecc. (Palaeontographica, 33 Bd.) pag. 158.
1889. „ „ Geyer, Ueber die liasischen Brachiopodenfauna des Hierlatz bei Hallstatt (Abhandl. d. k. k. geol. R. A., XV Bd.) pag. 71, tav. VIII, fig. 4-8.

La *Sp. alpina* Opp. è rappresentata da pochi esemplari nei calcari grigi della parte inferiore del Lias medio del M. San Giuliano. Essi corrispondono alle forme un po' slargate di questa specie e con apice molto curvato. La loro area è un po' concava e larga più della metà della lunghezza della conchiglia ; il contorno della conchiglia è tagliente. Benchè questi individui mostrino molti rapporti con la *Sp. rostrata* Schloth. sp., nondimeno se ne distinguono bene per la grandezza dell' area , per l' assenza del lobo e del seno alla fronte, nonchè per la minore convessità della valva imperforata.

La *Sp. compressa* Seg. e quella indicata col nome di *Sp. Cantanianensis* Can., var. *tauromenensis* Seg. del Lias medio messinese vanno aggregate alla *Sp. alpina* Opp., perchè non ne differiscono in nulla, come del resto mi son convinto con l'esame degli esemplari di Galati e di Taormina (Messina).

Il dott. Rothpletz (Op. cit.) espresse di già il dubbio che la *Sp. undata* Can. possa rappresentare la *Sp. alpina* Opp. L' esemplare originale figurato dal dott. Canavari si trova nelle collezioni dell'Ufficio geologico italiano, dove ho potuto esaminarlo e persuadermi infatti che esso non si può dividere dalla specie dell'Oppel.

La *Sp. alpina* Opp. si presenta nel Lias inferiore delle Alpi e della Selva Baconica; nel Lias medio dell' Appennino centrale (M. Soratte) e della Sicilia (M. Ucina presso Galati, Castelluccio presso Taormina e M. San Giuliano).

Spiriferina rostrata Schloth. sp.

1822. *Terebratulites rostratus* Schlotheim, Nachträge zur Petrefactenkunde, pag. 95, tav. XIV, fig. 4.

1830. *Delthyris rostrata* Zieten, Die Versteinerungen Würtembergs, pag. 51, tav. 38, fig. 3.

1840. „ *rostratus* v. Buch, Classification et déscription des Delthyris (Mem. de la Soc. géol. de France , 1 S., t. IV) tav. X, fig. 24.

1851. *Spirifer rostratus* Davidson, A monograph of brith. ool. and. liass. Brachiopoda (Palaeont. Society of London) pag. 20, tav. 2, fig. 1-2 (escluse fig. 7-9).

1851. „ „ Chapuis et Dewalque, Térrains secondaires du Louxembourg, pag. 237, tav. XXXV, fig. 6.

1853. „ „ Oppel, Der mittlere Lias Schwabens, pag. 73, tav. IV, fig. 7.

1854. „ „ Suess, Ueber die Brachiopoden der Kössener Schichten, pag. 19, tav. 2, fig. 8.

1858. „ „ Quenstedt, Der Jura, pag. 181, tav. 22, fig. 25.

1862. *Spiriferina rostrata* Deslongchamps, Études critiques sur des brachiopodes nouveaux ou peu connus, pag. 10, tav. 2, fig. 7-9.

1863. „ „ Ooster, Synopsis des brachiopodes fossiles des Alpes suisses, pag. 39, tav. 13, fig. 13-20.

1867. „ „ Dumortier, Dépôts jurassiques du bassin du Rhône; Lias inférieur, pag. 227, tav. XLIX, fig. 17.

1871. *Spirifer rostratus* Quenstedt, Die Brachiopoden Deutschlands pag. 527, tav. 54, fig. 96-107.

1874. *Spiriferina rostrata* Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con *T. Aspasia* della provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 58, tav. X, fig. 4.

1876. „ „ Davidson, Supplement to the brit. jurass. and triass. brachiopoda (Paleont. Society of London) pag. 95, tav. 9, fig. 6.

1880. „ „ Parona, Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili (Atti della R. Acc. dei Lincei, a. CCLXXVII) pag. 8, tav. I, fig. 1-2.

1881. *Spiriferina cantanianensis* Canavari, Alcuni nuovi brachiopochi degli strati con *T. Aspasia* Mgh. nell'Appennino centrale (Atti della Soc. tosc. di Sc. Nat., vol. V) pag. 2, tav. IX, fig. 1-4.

1882. „ *rostrata* Haas und Petri, Brachiopoden der Juraf. v. Elsass - Lothringen (Abhandl. z. geol. Spezialkarte v. El.-Loth., 11 Bd.) pag. 298, tav. XVI, fig. 4, 6, 8.

1884. „ „ Canavari, Contribuzione III alla conoscenza degli strati a *Ter. Aspasia* Mgh. nell'Appennino centrale (Atti della Soc. tosc. di Sc. Nat., vol. VI) pag. 8, tav. IX, fig. 1-2.

1884. „ „ Parona, I brachiopodi liassici di Saltrio e Arzo nelle Prealpi lombarde (Mem. dell'Istituto lombardo ecc.) pag. 9, tav. I, fig. 1-2.

1885. *Spirifer. rostratus* Quenstedt, Handbuch der Petrefaktenkunde, 3 ed., pag. 734, tav. 57, fig. 5-7.

1885. „ *rostratiformis* Seguenza, Le Spiriferina dei vari piani del Lias messinese (Boll. della Soc. geol. ital., vol. IV) pag. 303, tav. XIX, fig. 2, 2*a*, 2*b*.

1885. „ *macromorpha* Seguenza, Ibid., pag. 395, tav. XIX. fig. 3, 3*a*, 3*b*.

1885. „ *conglobata* Seguenza, Ibid., pag. 400, tav. XIX, fig. 6, 6*a*, 6*b*.

1885. „ *rethica* Seguenza, Ibid., pag. 401, tav. XIX, fig. 7, 7*a* 7*b*.

1885. „ *palaeomorpha* Seguenza, Ibid., pag. 402, tav. XIX, fig. 8, 8*a*, 8*b*, 8*c*.

1885. „ *tauromenitana* Seguenza, Ibid., pag. 404, tav. XIX, fig. 9, 9*a*, 9*b*.

1885. „ *subquadrata* Seguenza, Ibid., pag. 461, tav. XXI, fig. 1, 1*a*, 1*b*.

1886.	*Spirifer. parvirostris*	Seguenza, Ibid., pag. 460, tav. XIX, fig. 8, 8*a*, 8*b*.
1886.	„ *omeomorpha*	Seguenza, Ibid., pag. 307, tav. XIX, fig. 4, 4*a*, 4*b*.
1886.	„ *micromorpha*	Seguenza, Ibid., pag. 399, tav. XIX, fig. 5, 5*a* 5*b*.
1886.	„ *rostrata*	Di-Stefano, sul Lias inferiore di Taormina e de' suoi dintorni, (Giorn. d. Soc. di Sc. Nat. ed Econ. di Palermo, vol. XVIII), pag. 78, tav. 1-8.
1886.	„ „	Rothpletz, Geologisch-palaentologische Monographie der Vilser Alpen (Palaeontographica, Bd. 33) pag. 159.
1887.	„ „	Haas, Étude monographique et critique des brachiopodes rhétiens et jurassiques des Alpes vaudoises, II (Mém. de la Soc. pal. suisse) pag. 73, tav. VII, fig. 27.
1889.	„ „	Geyer, Ueber die liasischen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstatt (Abhandl. d. k. k. geol. R. A., XV Bd.) pag. 73, tav. VIII, fig. 3.

La *Sp. rostrata* Schloth. sp. è rappresentata nelle due parti del Lias medio del M. San Giuliano da molti grandi e piccoli esemplari. Essi sono perfettamente determinabili e non offrono contrassegni particolari, perchè io li debba figurare e descrivere. Parecchi esemplari rammentano molto la *Sp. insignis* Seg. (1), della quale possiedono l'apice molto curvo, ma non la valva imperforata così poco convessa. Del resto nel Lias medio di Taormina (Messina) io ho trovato esemplari di *Spiriferina* vicinissimi alla *Sp. insignis* Seg. e nondimeno riferibili sempre alla *Sp. rostrata* Schloth. sp., in modo che è da

(1) Seguenza, *Le Spiriferina dei varii piani del Lias messinese*, pag. 448, tav. XIX, fig. 4.

ritenere la figura della *Sp. insignis* come non corrispondente con esattezza ai tipi che se ne raccolgono nella località indicata dal prof. Seguenza come più ricca di esemplari, cioè al promontorio di Castelluccio (Taormina), dove si presentano anche la *Sp. alpina* Opp. e la *Sp. gryphoidea* Uhl. sicuramente determinabili.

Come io dimostrai già nel 1886, quasi tutte le *Spiriferina* del Lisa inferiore di Taormina descritte come nuove dal compianto prof. Seguenza debbono riferirsi alla *Sp. rostrata* Schloth. sp. Infatti vanno aggregate a questa la *Sp. rostratiformis* Seg., la *Sp. macromorpha* Seg., la *Sp. conglobata* Seg., la *Sp. rethica,* la *Sp. palaeomorpha* Seg., la *Sp. subquadrata* Seg., la *Sp. omeomorpha* Seg., la *Sp. micromorpha* Seg., la *Sp. parvirostris* Seg. e la *Sp. tauromenitana* Seg.. Quest'ultima, a dir vero, è una forma di passaggio alla *Sp. alpina* Opp..

Anche la *Sp. Cantanianensis* Can. del Lias medio dell'Appennino centrale non si può dividere dalla *Sp. rostrata* Schloth. sp., come di già notò il Rothpletz, perchè il carattere dei tubercoli della superficie, indicato come differenziale dal Canavari, si riscontra spesso sulla *Sp. rostrata* tipica. Essa però si avvicina, per varj caratteri della forma, alle varietà allungate della *Sp. alpina* Opp.

Per quanto riguarda la riunione alla *Sp. rostrata* delle due specie *Sp. Handeli* Di-Stef. e *Sp. Haasi* Di-Stef., proposta dal dott. Rothpletz, rimando il lettore a quanto io scrivo qui appresso (pag. 38 e pag. 42).

La *Sp. rostrata* è una specie del Lias inferiore, del medio e del superiore: esso si presenta in tanti luoghi e così noti del bacino mediterraneo e di quello dell'Europa media che non mette il conto di farne l'enumerazione.

Spiriferina Handeli Di-Stef.

1886. *Spiriferina Handeli* Di-Stefano, Sul Lias inferiore di Taormina e de' suoi dintorni, (Giorn. d. Soc. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo, vol. XVIII.) pag. 83, tav. 1. fig. 12, 14 (escluse fig. 12, 13, 15-17).

Nel calcare bianco con crinoidi della porzione superiore del Lias medio del M. San Giuliano si raccolgono varj esemplari di questa *Spiriferina*, ma generalmente in valve isolate. Essi sono più depressi e assai più slargati degl' individui estremi di Taormina che di già figurai e mostrano la linea cardinale quasi retta.

Io feci la separazione di questa specie dalla *Sp. rostrata* Schloth. sp., nonostante conoscessi bene la grande variabilità di forma della specie dello Schlotheim, perchè mi parve che si estendessero troppo i limiti di questa nostra concezione subbiettiva che chiamiamo gruppo specifico, comprendendo nella *Sp. rostrata* i molti individui di *Spiriferina* di Taormina che in tutti gli stadj di accrescimento sono depressi, col contorno tagliente e assai slargati trasversalmente, sui quali lo stesso prof. Seguenza aveva fondato la *Sp. papilio* e la *Sp. latissima (Le Spiriferina dei varii piani del Lias messinese,* p. 420 e pag. 422). Ora lo studio degli esemplari di Trapani mi mostra che la separazione dalla *Sp. rostrata* delle forme affini, ma appiattite, slargatissime e a linea cardinale assai lunga e quasi retta non è del tutto ingiustificata. Io del resto non mantengo nessuna eccessiva preferenza per la mia specie; però debbo riconoscere che il dare ai gruppi estremi di forme della *Sp. rostrata,* cioè a quelle ristrette, gonfie e molto allungate da un canto, e a quelle depresse e slargatissime dall' altro dei nomi distinti, non è privo di utilità metodica. È giusto notare però che solo gli esemplari 11, 14 della tav. 1 del mio lavoro sul Lias inferiore di Taormina io prendo a tipo della *Sp. Handeli,* perchè gli altri che io vi avevo aggiunto, sono a dir vero da riunire senz' altro alla specie dello Schlotheim.

Spiriferina sicula Gemm.

(Tav. 1, fig. 1-3)

1874. *Spiriferina sicula* Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con *T. Aspasia* della provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 55, tav. X, fig. 5.

1886. *Spiriferina sicula* Seguenza, Le Spiriferina dei varii piani del Lias messinese (Boll. della Società geol. ital., vol. IV) pag. 475.

1886. „ *undulata* Seguenza, Ibid., pag. 466, tav. XXI, fig. 2, *2a*, *2b*, *2c*.

1886. „ *Haasi* Di-Stefano, Sul Lias inferiore di Taormina e de' suoi dintorni, Giorn. d. Soc. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo. XVIII) pag. 39, tav. I, fig. 9, 10.

1890. „ *Torbolensis* Tausch, Zur Kenntniss der Fauna der " Grauen Kalke „ der Süd-Alpen (Abhandl. d. K. K. R. A., XV Bd.) pag. 10, tav. IX, fig. 8-10.

Il grande numero di esemplari della *Sp. sicula* Gemm. che ora si sono raccolti nel Museo geologico dell' Università di Palermo, fa conoscere estesamente i caratteri della specie e rende possibile l' esatta compilazione della sua sinonimia.

Nella *Sp. sicula* sono caratteristici il forte lobo, che, estendendosi fin sull' umbone della valva imperforata, rende questa più o meno gonfiata sulla sua linea mediana e spesso subcarenata; il seno della valva perforata sporgente in un lembo linguiforme assai lungo; l' area molto stretta, ben limitata e concava; la fessura deltidiale molto larga; l' apice molto robusto e tuttavia assai appuntito all' estremità, di media altezza e molto curvato; la commessura più o meno fortemente arcuata sui fianchi.

La forma della conchiglia è un po' variabile; essa si mostra nella massima parte dei casi trasversalmente slargata; ma è anche talvolta più lunga che larga. Non di raro è asimmetrica, per causa dello spostamento laterale del lobo e del seno.

La superficie delle due valve è liscia o fornita di costicine lon-

gitudinali arrotondite e leggerissime, ma ben visibili sulla regione frontale. Spesso si notano sulla conchiglia le cicatrici di numerose spine.

Gl' individui raccolti con abbondanza negli strati inferiori e superiori del Lias medio del M. San Giuliano raggiungono spesso grandi dimensioni, sono trasversalmente slargati e spesso forniti di costicine.

La *Sp. sicula* è certamente molto vicina alla *Sp. obtusa* Opp. (1); però ne differisce per la sua area assai meno larga e meno concava, pel più forte e più esteso lobo della valva imperforata, pel lunghissimo lembo linguiforme della valva perforata, per la linea cardinale arcuata e non diritta, nonchè per la forma meno dilatata e più globoso-ovale e per le grandi dimensioni che raggiunge. Le stesse differenze debbono notarsi rispetto alla *Sp. acuta* Stur di Hierlatz (2), la quale è con molta probabilità identica alla *Sp. obtusa* Opp., perchè la differenza dovuta all' angolosità del lembo del seno nella *Sp. acuta* giustificherebbe forse meglio la creazione di una varietà, anzichè d' una specie.

L' esemplare della *Sp. obtusa* Opp., figurato dal sig. Geyer nella tav. IX, fig. 1 del suo recente lavoro sulla fauna a brachiopodi di Hierlatz, è assai più vicino alla *Sp. sicula* che alla vera *Sp. obtusa*; ma sarebbe prematuro per ora di stabilire la esistenza della specie del prof. Gemmellaro a Hierlatz sulla figura di un solo esemplare.

La *Sp. undulata* Seg. del Lias medio messinese è certamente la *Sp. sicula* Gemm., con la quale conviene per tutti i caratteri. Il paragone degli esemplari di Galati, (dei quali uno è qui figurato nella Tav. 1, fig. 1, per la migliore conoscenza della specie) con gli esemplari grandi e piccoli della *Sp. sicula* di varj luoghi di Sicilia mi ha convinto della identità delle due specie.

Invece non posso affermare la corrispondenza con la *Sp. sicula* degli individui di Reichebachquelle (Pfroten) e di Bösen Tritt che il dott. Rothpletz vi riferì (3) e che forse si potrebbero compren-

(1) Oppel, *Ueber die Brachiopoden des unteren Lias*, pag. 542, tav. XI, fig. 8.

(2) Geyer, *Ueber die liasischen Brachiopoden des Hierlatz* ecc., pag. 77, Tav. IX, fig. 6.

(3) Rothpletz, *Geologisch-palaeontologische Monographie der Vilser Alpen*, tav. XIII, fig. 7, 8.

dere nelle varietà slargate e a lunga linea cardinale della *Sp. rostrata* Schloth. sp., già da me distinte col nome di *Sp. Handeli*. Essi non possiedono della *Sp. sicula* nè l'aspetto ovato-globoso, nè il forte lobo della valva imperforata, nè il lungo lembo linguiforme del seno di quella perforata. L'andamento della commessura laterale è anche differente, perchè non mostra la forte arcuazione che distingue la specie del prof. Gemmellaro.

Nel mio lavoro sul Lias inferiore di Taormina distinsi col nome di *Sp. Haasi* delle grosse *Spiriferina* un po' logore, che misi in istretta relazione con la *Sp. sicula* Gemm., della quale erano conosciute allora solo le forme piccole. Lo studio dei grandi esemplari di questa specie mi ha convinto ora che la *Sp. Haasi* deve riunirsi alla *Sp. sicula* e non alla *Sp. rostrata* Schloth. sp., come crede il dott. Rothpletz (1). Infatti la *Sp. Haasi*, come anche la *Sp. sicula*, si distingue dalla affine *Sp. rostrata* Schloth. sp. pel fortissimo lobo della valva imperforata esteso fin sopra l'umbone, pel lungo lembo linguiforme del seno della valva perforata, nonchè per la costante più forte arcuazione delle commessure sui fianchi della conchiglia.

La *Sp. sicula* è certamente assai vicina alla *Sp. rostrata* Schloth. sp.; ma, pe' suoi caratteri, tiene un posto intermedio tra questa specie e la *Sp. obtusa* Opp., secondo è stato notato, del resto, da varj autori.

Il dott. L. Tausch ha descritto una *Sp. Torbolensis* (2) del calcare grigio dei dintorni di Roveredo, riconoscendone bene le intime analogie con la *Sp. sicula* Gemm., dalla quale l'ha divisa solo perchè sulle figure di questa specie pubblicate dal prof. Gemmellaro non si scorgono coste. La *Sp. sicula* è però spesso costata nel modo che si osserva sulla *Sp. Torbolensis* e corrisponde del tutto, specialmente per le sue forme allungate (*Sp. undulata* Seg.), a questa specie descritta dal mio amico dott. Tausch.

---

(1) Rothpletz, *Op. cit.*, pag. 172.

(2) Tausch, *Op. cit.*

La *Sp. sicula* abbonda nella parte inferiore e superiore del Lias medio del M. San Giuliano.

Alcuni esemplari bivalvi offrono le seguenti dimensioni:

	I.	II.	III.	IV.
Lunghezza	23mm.	31mm.	35mm.	38mm.
Larghezza	24.	26.	30.	32.
Spessore	22.	23.	26.	27.

Spiriferina Darwini Gemm.

(Tav. 1, fig. 4)

1874. *Spiriferina* cfr. *angulata* Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con *T. Aspasia* della provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 56, tav. X, fig. 6, 7.

1878. *Spiriferina Darwini* Gemmellaro, Sui fossili del calcare cristallino delle montagne del Casale e di Bellampo nella provincia di Palermo (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 409, tav. XXI, fig. 22-26.

La *Sp. Darwini* Gemm. è rappresentata da pochi esemplari nella parte inferiore del Lias medio del M. San Giuliano. Essi offrono i seguenti caratteri:

Conchiglia un po' più larga che lunga e in qualche caso asimmetrica; valva perforata di forma piramidale, elevata, fornita di un seno largo e leggiero, talora appena visibile, che si estende dall' apice alla fronte; valva imperforata poco convessa, nondimeno un po' gibbosa sulla sua linea mediana per effetto di un lobo largo e leggiero, non limitato nettamente dalle parti laterali della conchiglia. L' apice è acuto e leggermente curvato. L' area è molto larga, alta, piana, nettamente limitata ai lati e coperta di forti strie trasversali. La linea cardinale è diritta e lunga quasi quanto l' intiera larghez-

za della conchiglia. La linea commessurale è diritta sui lati e sinuata alla fronte.

La superficie della conchiglia è coperta di fini tubercoli irregolarmente disposti, e di forti strie di accrescimento. Sopra alcuni esemplari mancanti dei primi strati della conchiglia si manifestano le impressioni vascolari sotto forma di strie o di fine costelle irregolari e longitudinali, che danno alle valve un elegante ornamento.

Sull' apice della valva perforata si scorge il setto, che giunge quasi sul mezzo della valva perforata, e le due lamine rostrali, leggermente arcuate verso il setto.

Il prof. Gemmellaro discorse di già a lungo sui rapporti della *Sp. Darwini* con varie altre specie. Io mi limito solo a notare che essa è assai vicina alla *Sp. angulata* Opp., ma che se ne differisce pel seno molto leggiero e mai angoloso al fondo, per la mancanza delle forti compressioni laterali che rendono quadrangolare la valva perforata della specie di Oppel, per l' apice più curvato e non diretto indietro, nonchè per la mancanza sui lati della sua linea commessurale di forti arcuazioni. Essa è anche in istretta relazione con la *Sp. obtusa* Opp.; ma ne è distinta soprattutto per la forma più piramidata della valva perforata, per la grandezza dell' area, per la forma più depressa e pel carattere del seno esteso fin sull' apice della valva perforata.

La *Sp. Darwini* è una specie del calcare cristallino del Lias inferiore della provincia di Palermo, per la prima volta trovata ora nel Lias medio.

Spiriferina Hartmanni Deslongchamps (non Zieten.)

1862. *Spiriferina Hartmanni* Deslongchamps, Ètudes critiques sur des brachiopodes nouveaux ou peu connus, pag. 13, tav. 11, fig. 10, 11.

1851. „ *rostrata* Davidson, A Monograph of British oolitic and liasic Brachiopoda (Palaeont. Society of London) pag. 22, tav. 11, fig. 10, 12.

1867. *Spiriferina Hartmanni* Dumortier, Études paléontologiques sur les dépôts jurassiques du bassin du Rhône; Lias inferieur; pag. 228, tav. XLIX, fig. 15, 16.

1876. „ *Hartmanni* Davidson, Supplement to the British jurassic and triassic Brachiopoda (Palaeont. Society of London) pag. 95, tav. XI, fig. 7.

1884. „ *Hartmanni* Parona, I brachiopodi liassici di Saltrio e Arzo nelle Prealpi lombarde (Mem. dell'Istituto lombardo) pag. 10, tav. I, fig. 3.

1886. „ *capuliformis* Seguenza, Le Spiriferina dei varii piani del Lias messinese (Boll. della Soc. geol. ital., vol. IV) pag. 470, tav. XXI, fig. 4, 4*a*, 4*b*, 4*c*.

1886. „ *Hartmanni* Rothpletz, Geologisch-palaeontologische Monographie der Vilser Alpen (Palaeontographica, XXXIII Bd.) pag. 160.

Si debbono riferire a questa specie gli abbondanti esemplari di una grande *Spiriferina* che si raccoglie quasi sempre a valve staccate nella parte inferiore e nella superiore del Lias medio del M. San Giuliano. La valva perforata ha un aspetto ben distinto per la sua forma grande, alta, conoidale; per l'area molto alta, larga, piana o leggermente concava, ben limitata sui lati; pel seno largo, leggiero e talvolta appena visibile o scancellato; per l'apice spesso, appuntito e poco o discretamente curvato, nonchè per la fessura deltidiale alta e larga. La valva imperforata mostra un lobo molto leggiero, non ben limitato e largo. La superficie della conchiglia è solo coperta di strie di accrescimento molto forti, e per lo più distinte in forma di risalti, e di una granulazione fitta e distinta, lasciata dalle numerose spine che ornavano le valve.

Tutti questi caratteri corrispondono sì bene a quelli della *Sp.*

Hartmanni figurata dal Deslongchamps, che è impossibile distaccarnela. Alla stessa specie va aggregata la *Sp. capuliformis* Seg. del Lias medio messinese, perchè non ne differisce in nulla.

La *Sp. Hartmanni* rappresentata dal Deslongchamps è differente dalla *Sp. Hartmanni* Zieten (*Die Versteinerungen Würtembergs*, tav. 38, fig. 1.). Questa non ha tali contrassegni perchè si possa tener divisa dalla *Sp. rostrata* Schloth. sp., mentre quella pei caratteri interni, per la sua area molto alta e larga e nettamente limitata, nonchè per l' apice più spesso, più elevato e meno curvato se ne distacca bene. In queste condizioni si può mantenere, in via eccezionale, il nome di *Sp. Hartmanni* solo per la specie del Deslongchamps, riunendo gli esemplari dello Zieten alla *Sp. rostrata* Schloth. sp.

Le forme tipiche della *Sp. Hartmanni* Deslongc. non Zieten sono date dalle figure del Deslongchamps, del Dumortier e del Seguenza *(Sp. capuliformis)*; però gli esemplari inglesi rappresentati dal Davidson e l' individuo delle Prealpi lombarde dato dal Parona, gli uni soprattutto per l' elevatezza dell' apice e l' altro per la larghezza dell' area, non mi pare se ne possano dividere. È da notare anche che un esemplare di *Spiriferina* di Hierlatz, riferito dal Geyer (1) alla *Sp. obtusa* Opp., è estremamente vicino alla *Sp. Hartmanni* Deslongc. non Zieten, per ragione del suo alto apice e dei caratteri dell' area.

La *Sp. Hartmanni* è una delle varie specie intermedie tra la *Sp. rostrata* Schloth. sp. e la *Sp. obtusa* Opp. Da quest' ultima si differisce per la sua area molto alta e larga, per la forma più globulare e meno dilatata trasversalmente, per la linea cardinale non diritta e per le sue grandi dimensioni. Rimane però sempre molto vicina alle due specie, senza che si possa identificare con alcuna di esse.

Non sono da disconoscere gli stretti rapporti della specie in esame con la *Sp. Darwini* Gemm., dalla quale si distingue solo per la sua area meno acutamente limitata, più alta ma assai meno lar-

(1) Geyer, *Op. cit.*, pag. 75, tav. IX, fig. 3.

ga alla base, per l' aspetto non piramidale della valva perforata, per la forma più globulare e non dilatata trasversalmente, e per le sue grandi dimensioni. Inoltre è da rilevare che l' estremità dell' apice nelle forme tipiche della *Sp. Hartmanni* è più acuto, più protratto e più curvato.

Le dimensioni di alcune valve perforate sono le seguenti:

	I.	II.	III.
Lunghezza	46mm.	44mm.	42mm.
Larghezza	46mm.	45mm.	41mm.

Spiriferina Statira Gemm.

(Tav. I, fig. 5a)

1874. *Spiriferina Statira* Gemmellaro, Sui fossili del calcare cristallino della zona con *T. Aspasia* della provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 54, tav. X, fig. 3.

Questa specie è rappresentata nella parte inferiore del Lias medio del M. San Giuliano da rari e piccoli esemplari corrispondenti agl' individui illustrati dal prof. Gemmellaro. Si raccoglie invece qualche individuo relativamente grande nel Lias medio del piccolo promontorio di Castelluccio presso Taormina (Messina), d'onde proviene l' esemplare che io, per la più estesa conoscenza della specie, ho fatto figurare in questo lavoro.

La *Sp. Statira* Gemm. ha le più grandi analogie con la *Sp. angulata* Opp., alla quale vorrebbe unirla il dott. Rothpletz (1); tuttavia mi pare che se ne debba mantenere distinta. Infatti la *Sp. Statira* negl' individui giovani e negli adulti non ha mai un seno sulla valva perforata, sibbene un lembo linguiforme piano, largo e sporgente, in opposizione ai caratteri della *Sp. angulata*, che mostra un seno molto profondo e angoloso. Inoltre mancano nella specie del

(1) Rothpletz, *Op. cit.*, pag. 160.

prof. Gemmellaro le forti compressioni laterali della valva perforata che danno a quella della *Sp. angulata* il noto aspetto piramidato, e dippiù si rileva che nella *Sp. Statira* il piano dell'area è molto più inclinato rispetto alla linea cardinale che non sia nella *Sp. angulata*. Queste differenze sono sufficienti a tener separate le due specie, se dobbiamo servirci di certi criterj che pur sono necessarj per aggruppare gl' individui in specie.

La *Sp. Statira* si è raccolta finora nel Lias medio del M. San Giuliano e in quello della contrada Sant' Anna presso il comune di Giuliana (Palermo).

L' esemplare figurato ha le seguenti dimensioni:

Lunghezza	18mm.
Larghezza	22.
Spessore	16.

Spiriferina angulata Opp.

1861. *Spiriferina angulata* Oppel, Ueber die Brachiopoden des untern Lias (Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellschf.) pag. 541, tav. XI, fig. 7*a*, *b*.

1878. „ „ Gemmellaro, Sui fossili del calcare cristallino delle Montagne del Casale e di Bellampo nella provincia di Palermo (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 412, tav. XXXI, fig, 41-46.

1879. „ cfr. *angulata* Uhlig, Ueber die liasische Brachiopodenfauna von Sospirolo bei Belluno (Sitzb. d. Akad. d. Wissenschf., LXXX Bd.) tav. I, fig. 4.

1886. „ *angulata* Seguenza, Le Spiriferina dei varii piani del Lias messinese (Boll. della Soc. geol. italiana, vol. IV) p. 472.

1886. *Spiriferina Carmelinae* Seguenza, Ibid., pag. 478, tav. XXI, fig. 5, 5*a*, 5*b*.
1886. „ „ var. *pyramidata* Seguenza, Ibid., pag. 478, tav. XXI, fig. 6, 6*a*.
1886. „ *angulata* Rothpletz, Geologisch-palaeontologische Monographie der Vilser Alpen (Palaeontographica, XXXIII Bd.) pag. 160.
1889. „ *angulata* Geyer, Ueber die liasischen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstatt (Abhandl. d. k. k. geol. R. A., XV Bd.,) pag. 74, tav. IX, fig. 7-12.

Questa specie è rappresentata da pochi esemplari nella parte inferiore del Lias medio del M. San Giuliano, ma esattamente determinabili, perchè offronoa prima vista l'aspetto caratteristico della specie di Oppel. Essi non presentano contrassegni particolari e perciò io non credo necessario di figurarli.

La *Sp. Carmelinae* Seg., del Lias medio messinese è senza dubbio *Sp. angulata* Opp. Lo stesso è da dire della *Sp. Carmelinae* Seg., var. *pyramidata* Seg., la quale, come ho visto su molti esemplari del Lias medio delle Rocche rosse di Galati (Messina) corrisponde per la forma alla *Sp. angulata* tipica, e, per le leggiere costelle che la ornano, alla var. *costata* Geyer.

Dei rapporti della *Sp. angulata* con la *Sp. Statira* Gemm. e con la *Sp. Geyeri* Di-Stef., è discorso negli articoli che riguardano queste due specie.

La *Sp. angulata* si presenta in Sicilia nel Lias inferiore di Bellampo presso Palermo e nel medio del M. San Giuliano, del promontorio di Castelluccio presso Taormina (Messina) e delle Rocche rosse di Galati (Messina). Altrove si raccoglie nel Lias inferiore di Hierlatz, di Sospirolo e della Selva Baconica; nel medio di Gozzano e dell' Appennino centrale.

Spiriferina Geyeri, Di-Stef.

(*Tav. I, fig. 6.*)

Conchiglia globulare e più lunga che larga. Valva imperforata molto gonfia, più grande del doppio dell' altra, fornita di un lobo molto elevato e nettamente distinto. Valva perforata conica, bassa, munita di un seno largo e discretamente profondo, ma non angoloso, che comincia debolissimo sull' apice e si fa più forte alla fronte, dove sporge in un lembo stretto e lungo. Apice acuto e diritto; area alta, piana, larga quanto tutta la linea cardinale, acutamente limitata e obliqua rispetto alla linea cardinale, che è diritta e lunga, ma meno dell' intiera larghezza della conchiglia.

La fessura deltidiale è stretta e molto alta. Il setto, che si osserva sull' apice della valva perforata, giunge quasi sul centro della conchiglia; le lamine rostrali sono lunghe e subparallele al setto o pochissimo divergenti.

La superficie della conchiglia si mostra ornata di costelle irradianti dagli apici, larghe, ma leggiere e bassissime. Finora ho trovato il lobo sempre libero di coste, ma non così il seno, che le mostra nell' esemplare figurato.

La linea commessurale è fortemente ed acutamente arcuata ai lati e sinuata alla fronte per effetto del lungo lembo della valva perforata.

Di questa specie posseggo solo due esemplari intieri e due valve staccate, nondimeno la sua forma globulare è così distinta, che io non ho potuto recisamente identificarla con la *Sp. angulata* Opp., che le è estremamente vicina. Infatti la sua valva perforata non ha punto l'aspetto caratteristico di piramide quadrangolare, come lo ha quella della *Sp. angulata*, nella quale è dovuto alle forti compressioni laterali, nè il suo seno è acutamente limitato ai lati e angoloso nel fondo. Inoltre tale valva è anche bassa e più piccola della metà di quella perforata, che si mostra invece assai gonfia e ventricosa. Quest' ultimo carattere della *Sp. Geyeri* mi pare molto importante

come differenziale, perchè nella *Sp. angulata* il rapporto della grandezza delle due valve è differente, cioè la valva perforata è molto elevata e sempre più grande, e l' imperforata più piccola e depressa. Per queste differenze e perchè il piano dell' area è obliquo rispetto alla linea cardinale, come nella *Sp. Statira* Gemm. e nella *Sp. Zignoi* Di-Stef., io ho creduto di separare come specie distinta la descritta *Spiriferina*, che altri può forse considerare solo come una varietà della *Sp. angulata.*

La *Sp. Geyeri* si distingue dalla vicina *Sp. rupestris* Deslongc. (1) per la grande gonfiezza della valva imperforata, per la bassezza di quella perforata, per la minore larghezza del lobo, che è però più elevato, per la forte arcuazione della commessura laterale e per le coste assai più leggiere.

Per quanto riguarda le relazioni con le *Sp. Statira* Gemm. e *Sp. Zignoi* Di Stef., che per l'obbliquità dell'area rispetto alla linea cardinale appartengono allo stesso gruppo della *Sp. Geyeri*, questa si distingue dalla prima, oltre che pei caratteri notati a proposito della *Sp. angulata*, per la presenza del seno, e dalla seconda per la presenza del forte lobo e delle arcuazioni della commessura laterale, nonchè per l'altezza maggiore della valva perforata.

Questa specie si trova solo nella parte superiore del Lias in esame e offre queste misure:

	I	II
Lunghezza	24mm.	21mm.
Larghezza	23.	19.
Spessore	22.	20.

Spiriferina Zignoi Di Stef.

(Tav. I, fig. 7).

Conchiglia liscia, molto inequivalve, più larga che lunga. Valva perforata bassissima, conica, fornita sulla fronte di un seno largo e

(1) Deslongchamps, *Études critiques sur des brachiopodes nouveaux ou peu connus*, 1862, pag. 4, tav. I, fig. 3-7.

leggerissimo, che si manifesta rapidamente e talora s' inflette verso l' altra valva. Su certi individui la depressione del seno è quasi invisibile. Valva imperforata assai più grande della perforata, gonfia, con l' umbone robusto, sporgente e fortemente curvato sulla linea cardinale, e munita di un lobo largo, assai leggiero, non ben distinto dalle parti laterali della conchiglia, ma che tuttavia la rende largamente e leggermente gibbosa sulla linea mediana.

Apice basso, appuntito, diritto, quasi centrale; area assai stretta, più o meno ben limitata, ma non da angoli acuti, piana, molto obbliqua rispetto alla linea cardinale, ornata di forti strie trasversali di accrescimento e di fine strie longitudinali. Fessura deltidiale alta e larga; linea cardinale compresa nell' area, diritta e corta; setto e lamine rostrali corti.

La commessura delle valve corre in un piano perpendicolare all' asse dell' apice della conchiglia, ed è diritta sui lati e inflessa più o meno leggermente alla fronte. La superficie della conchiglia è coperta di una punteggiatura fitta e fina, e di strie di accrescimento forti e assai rilevate verso la regione frontale.

Questa specie ha il tipo della *Sp. Sylvia* Gemm. del Lias inferiore (1), dalla quale origina e con la quale ha la più stretta analogia; però se ne distingue per l' apice sempre molto basso e centrale, e per la forma diversa della sua valva imperforata, che è gonfia, assai più grande di quella perforata, non slargata trasversalmente, gibbosa sulla sua linea mediana e provvista di un umbone forte e ricurvo.

La *Sp. depressa* Seg., (2) del Lias medio messinese, che il Rothpletz (3) vorrebbe unire alla *Sp. capuliformis* Seg., ha certo assai stretti rapporti con la *Sp. Zignoi*, però la specie del Seguenza è identica con la *Sp. Sylvia* Gemm., della quale possiede tutti i ca-

---

(1) Gemmellaro, *Sui fossili del calcare cristallino delle montagne del Casale e di Bellampo*, pag. 410, tav. XXXI, fig. 27-33.

(2) Seguenza, *Le Spiriferina dei varii piani del Lias messinese*, pag. 468, tav XXI, fig. 3, 3*a*.

(3) Rothpletz, *Op. cit.*, pag. 172.

ratteri dell' apice, dell' area, della fessura deltidiale e della forma, come potei convincermi col diretto paragone degli esemplari del Lias medio di Castelluccio presso Taormina e con quelli originali della specie del prof. Gemmellaro. Del resto nel Lias medio del messinese la *Sp. Sylvia* Gemm. e la *Sp. Zignoi* Di-Stef. si presentano associate.

La *Sp. Statira* Gemm. del Lias medio di Sicilia è anche vicina, alla *Sp. Zignoi*; però la eccentricità e l' altezza dell' apice della prima, la maggiore grandezza della sua area, il molto minore sviluppo della sua valva imperforata, le forti sinuosità della commessura laterale e il carattere del lembo linguiforme che nella *Sp. Statira* è molto lungo, e, cadendo molto rapidamente, dà alla conchiglia una forma troncata dietro, non ne permettono la riunione.

Questa specie è rappresentata da un discreto numero di esemplari nella parte superiore e nell' inferiore del Lias medio del M. San Giuliano, ma per lo più in valve isolate. Anche nel Lias medio del piccolo promontorio di Castelluccio presso Taormina (Messina) si raccolgono molte valve imperforate.

L' esemplare figurato ha le seguenti dimensioni:

Lunghezza	16mm.
Larghezza	22.
Spessore	14.

Spiriferina segregata Di-Stef.

(Tav. I, fig. 8-12).

1886. *Spiriferina segregata* Di-Stefano, Sul Lias inferiore di Taormina e de' suoi dintorni, pag. 87, tav. I, fig. 18.

Conchiglia nella massima parte dei casi slargata trasversalmente, talvolta tanto larga che lunga, molto raramente più lunga che larga, spesso asimmetrica. La sua valva imperforata, discretamente

convessa, è fornita di un lobo mediano più o meno forte, che comincia sull' umbone. La valva perforata è alta, conica, fornita di un seno profondo e largo, che nasce distinto sull' apice e alla fronte sporge in un lembo più o meno lungo. L' apice è compresso sui lati, appuntito, più o meno curvato, spesso strangolato, rostrato e contorto per deformazione.

L' area è molto alta e larga, più o meno leggermente concava nei grandi esemplari e piana nei piccoli, nettamente limitata e striata longitudinalmente e trasversalmente. La fessura deltidiale è alta e larga; la linea cardinale diritta, lunga quanto l' intiera larghezza della conchiglia e compresa tutta nell' area.

La riunione delle valve si fa con angolo ottuso; la loro commessura, mentre negli esemplari molto giovani è dentata sui lati e sinuata alla fronte, negli esemplari adulti, che sogliono avere il lembo del seno assai lungo, è lateralmente arcuata.

La supercie di ogni valva è ornata di 14-18 coste forti ed angolose, in varj casi biforcate o triforcate a varie altezze, delle quali 3 si presentano sul lobo, 1-4 nel seno e 5-9 sulle parti laterali della conchiglia. Due delle coste del lobo sogliono quasi sempre riunirsi prima di giungere sull' umbone; le due coste del seno più esterne sogliono riunirsi sulla regione apiciale con le due che limitano i lati di detto seno.

La conchiglia è coperta di numerosi piccoli tubercoli disposti in molte serie longitudinali e sopra sottili linee rilevate (Tav. I, fig. 10). Essi si presentano sulle coste e sugli spazj che le separano. Le strie di accrescimento sono forti e rendono talora le coste subnodulose.

Sull' apice della valva perforata si osservano le due lamine rostrali subparallele e il setto, che giunge fin quasi sul centro della conchiglia.

Questa specie si raccoglie abbondantemente nella parte inferiore e nella superiore del Lias medio del M. San Giuliano. Le variazioni che presenta si restringono alla maggiore o minore curvatura dell'apice, che rende l' area talvolta un po' concava, e alla

maggiore o minore altezza di esso. Il lobo e il seno si spostano spesso verso un lato o l'altro.

Nel 1886 descrissi questa specie sopra pochi giovani esemplari dei dintorni di Taormina, e la diagnosi ne era perciò manchevole. L'esame del Lias medio del M. San Giuliano, della provincia di Messina e di Girgenti me ne ha ora fatto conoscere un gran numero di individui, permettendomi di poterne meglio e più estesamente studiare i caratteri.

Espressi di già il dubbio nel mio lavoro sul " *Lias inferiore di Taormina* ecc. " che questa specie potesse essere riunita alla *Sp. producta*, Seg. (1) del Lias medio di Galati e di Castelluccio (Messina); però ora il paragone degl'individui messinesi con due esemplari della *Sp. Davidsoni* Deslongc., (2) degli strati con *Leptaena* del Lias superiore di May (Francia), ottenuti in comunicazione dal Deslongchamps, poco avanti la sua morte, e per mezzo degli amichevoli uffici del march. A. De-Gregorio, mi ha convinto che la *Sp. producta* Seg., è identica con quest'ultima specie. Nello stesso tempo tale esame mi ha mostrato le intime analogie della *Sp. segregata* Di-Stef. con la *Sp. Davidsoni* Deslongc., sicchè ho esitato a separarle. A dir vero la *Sp. segregata* sembra a prima vista più una varietà della *Sp. Davidsoni* Deslongc., che una specie distinta; però essa non mostra mai quella enorme sproporzione nella grandezza delle valve che è caratteristica nella specie francese; invece la sua valva perforata è sempre più bassa, meno massiccia, assai più ristretta sulla regione apiciale e fornita di un apice più piccolo e per lo più quasi strangolato, pel che l'area è sempre più bassa, assai più larga alla base e rapidamente ristretta sopra. Questi caratteri costanti dell'apice e dell'area danno alla *Sp. segregata* un aspetto differente;

---

(1) Seguenza, *Le Spiriferina dei varii piani del Lias messinese*, pag. 485, tav. XXI, fig. 8, 8*a*, 8*b*, 8*c*.

(2) Deslongchamps, *Notice presentée à l'Institut des provinces sur un genre nouveau de brachiopodes*, 1855 (Annuaire de l'Institut des provinces; Caen), pag. 13, fig. 20 dell'unica tavola. — *Mémoire sur la couche à Leptaena du Lias*, ecc., 1859 (Bull. de la Soc. linn. de Normandie) pag. 40, tav. III, fig. 1-3.

ma inoltre bisogna notare che, mentre nella *Sp. Davidsoni* Deslongc. le spine della superficie si trovano solo sulle creste delle coste, nella *Sp. segregata* coprono tutta la larghezza delle coste e gli spazj che le separano. Per queste ragioni io ho creduto poterla tener separata dalla *Sp. Davidsoni* Deslongc, pur riguardandola come una specie molto affine.

La *Sp. Gillieroni* Haas (1), a giudicarne dalla figura, parrebbe un esemplare della *Sp. segregata*, Di-Stef., che infatti è spesso asimmetrica, sia per espostamento verso un lato o l'altro dell'apice, che del seno e del lobo.

Parecchie altre *Spiriferina* liassiche e retiche sono vicine alla *Sp. segregata*, come la *Sp. Tessoni* Davids. (2), la *Sp. Deslongchampsi* Davids. (3), la *Sp. Foreli* Haas. (4), la *Sp. expanso-plicata* Par. (5), e la *Sp. Collenoti* Deslongc. (6). Questa ultima specie, che proviene dall' Infralias francese, è vicinissima alla *Sp. segregata*, che ne differisce solo per le sue coste non arrotondite sopra, più forti e assai angolose, per l'apice e la fessura deltidiale più stretti, pel lungo lembo linguiforme del seno e per la commessura laterale chiaramente arcuata. Le forme giovani della *Sp. segregata* sono più vicine alla *Sp. Collenoti* Deslongc. che le adulte, e mi pare che ne attestino la derivazione.

Per quanto riguarda le altre specie citate, rilevo che la *Sp. segregata* si differisce dalla *Sp. Tessoni* Davids., per la forma più slargata, per le coste più larghe, di numero molto minore e più raramente biforcate, nonchè pel carattere della sua valva imperforata

---

(1) Haas, *Étude monogr. et crit. des brachiopodes rhétiens et jurassiques des Alpes vaudoises* ecc; 1887, pag 67, tav. VII, fig. 26 e 29.

(2) Davidson, *Annals and Mag. of Nat. History*, 1852, vol. IX, tav. XV, fig. 1, 2.

(3) Davidson, *Supplement to the Brit. jur. and triass. Brachiopoda*, pag. 101, tav. XI, fig. 12.

(4) Haas, *Étude monogr. et crit. des brachiopodes rhét. et jurassiques des Alpes vaudoises*, ecc. 1, pag. 28, tav. II, fig. 16.

(5) Parona, *I brachiopodi liassici di Saltrio e Arzo* ecc., pag. 238, tav. I, fig. 7-9.

(6) Deslongchamps, *Études critiques sur des brachiopodes nouveaux ou peu connus*, 1862-86, pag. 233, tav. XXV, fig. 1-3.

assai meno convessa; dalla *Sp. Deslongchempsi* Davids. per le coste angolose sopra e assai meno numerose, per l' area più elevata e per la valva imperforata più depressa; dalla *Sp. Foreli* Haas per l'apice curvato e per le coste molto forti ed angolose sopra, e infine dalla più lontana *Sp. expanso-plicata* Par. per la forma meno dilatata, per l'area meno larga alla base, per la fessura deltidiale più stretta e per le coste più forti e angolose sopra.

Fra le spiriferine *costati-sinuosae* del Trias la *Sp. gregaria* Suess non Peters, come il Wöhrmann (1) e il Bittner (2) ce la figurano, ha molti rapporti con la *Sp. segregata*, tanto che può esserne riguardata come la progenitrice.

La *Sp. segregata* si raccoglie con abbondanza nel Lias medio di Castelluccio (Taormina) in quello dei due livelli del M. San Giuliano, a Taja-di-sopra (Caltabellotta) e raramente nel Lias inferiore di Taormina.

Le dimensioni dei migliori esemplari completi sono le seguenti:

	I.	II.	III.	IV.
Lunghezza	20mm.	13mm.	12mm.	11mm.
Larghezza	21.	13.	13.	12.
Spessore	12.	11.	10.	10.

Spiriferina gibba Seg.

(Tav. 1, fig. 13-16; Tav. 11, fig. 1)

1885. *Spiriferina gibba* Seguenza, Le Spiriferina dei varii piani del Lias messinese (Boll. della Soc. geol. ital., vol. IV) pag. 481, tav. XXI, fig. 7, 7*a*, 7*b* 7*c*.

Conchiglia quasi equivalve, spesso asimmetrica, più larga che

(1) Wöhrmann, *Die Fauna d. sogenannten Cardita-und Raibler-Schichben* ecc., 1889 (Jarbuch d. K. K. geol. R. A., pag. 197, tav. V, fig. 24-27.)

(2) Bittner, *Brachiopoden der alpinen Trias;* Wien, 1890 (Abhadl. d. K. K. geol. R. A. XIV. Bd.) pag. 140 e 145, tav. XXVIII, fig. 14-19.

lunga o tanto larga che lunga, molto convessa e per lo più quasi globulare. La valva imperforata è più convessa dell' altra, slargata trasversalmente e fornita di un lobo mediano discretamente forte e largo, che la rende un po' gibbosa sulla sua linea mediana.

Quella perforata è alta, ordinariamente robusta e più o meno tozza, piramidale, munita di un seno molto profondo e largo, subangoloso al fondo, che comincia sull'apice e alla fronte sporge in un seno più o meno lungo. Tale seno è frequentemente spostato verso un lato o l' altro della conchiglia.

L' apice è discretamente curvo o poco, non di raro quasi diritto; esso è robusto, ma con estremità appuntita. L' area è molto alta, larga, piana, limitata da due spigoli assai ottusi, coperta di forti strie trasversali di accrescimento e di sottili linee longitudinali. La fessura deltidiale è molto alta e larga. La linea cardinale è diritta ed occupa i $^2/_3$ dell'intiera larghezza della conchiglia; essa passa alla commessura laterale, arcuandosi leggermente alle estremità.

La superficie della conchiglia è liscia o più spesso ornata di 8-12 coste larghe e arrotondite, che svaniscono prima di giungere all' apice. Esse lasciano libero il lobo e il seno.

Le strie di accrescimento sono molti forti ed imbricate. La conchiglia quando è ben conservata, si mostra coperta di tubercoli fitti e fini; se mancano i primi strati di essa, allora fa osservare una fina punteggiatura.

Sull' apice della valva perforata si notano le lamine rostrali e il setto, che sono molto lunghi.

La riunione delle valve si fa con angolo ottuso; la loro commessura è spesso chiaramente dentata sui lati e sulla fronte, un po' arcuata sui fianchi presso la linea frontale e sinuata alla fronte.

Questa specie è estremamente variabile rispetto ai rapporti della lunghezza e della larghezza, alla maggiore o minore altezza e robustezza della valva perforata, alla curvatura dell' apice, che da diritto diventa discretamente curvato, alla estensione dell' area e alla presenza o mancanza delle coste.

Gli esemplari lisci sogliono avere la valva perforata alta, più ristretta sui lati e l'apice curvato. Essi sono abbondantissimi.

Le figure di questa specie date dal Seguenza non ne rappresentano con esattezza i caratteri, segnatamente per quanto riguarda la valva imperforata. Le due valva isolate e l'esemplare bivalve da me figurati servono a dare una esatta conoscenza della specie, sebbene manchi la figura di uno degl'individui lisci, che per causa delle poche tavole concessemi, non potei far disegnare.

La *Sp. gibba* Seg: è in relazione con la *Sp. semiplicata* Gemm., con la *Sp. Haueri* Suess e con la *Sp. rupestris* Deslongc. ecc. I più intimi rapporti li ha con la *Sp. semiplicata* Gemm. (1); però questa ha sempre una forma più svelta e più piramidale, dovuta all'apice più ristretto e diritto, e, soprattutto, mostra l'area acutamente limitata e la valva imperforata così depressa da sembrare operculare, mentre quella della *Sp. gibba* è molto gonfia, anche nei piccoli individui. Dippiù il seno della *Sp. semiplicata* è assai stretto.

Anche intimi sono i rapporti della *Sp. gibba* con la *Sp. Haueri* Suess (2); però la specie del prof. Seguenza se ne distingue per la forma meno dilatata e più globulosa, per la robustezza dell'apice, per le coste di numero minore, ma più forti e più larghe. Gli individui lisci della *Sp. gibba* se ne separano anche bene per il loro aspetto globulare e non alato, per la gonfiezza della valva imperforata e per la robustezza dell'apice. È da notare anche che l'area della *Sp. gibba* è sempre alla base assai meno larga di quella della *Sp. Haueri.*

La *Sp. rupestris* Deslongc. differisce dalla *Sp. gibba*, perchè assai inequivalve, in opposizione ai caratteri della specie siciliana quasi equivalve, e perchè ha la valva perforata più bassa e più tozza, quella imperforata gonfia, le coste non estese fino all'apice e il lobo più stretto.

Certi esemplari lisci richiamano molto la *Sp. Hartmanni* De-

(1) Gemmellaro, *Sui fossili del calcare cristallino delle Montagne del Casale e di Bellampo nella provincia di Palermo*, pag. 413, fig. 47-49.

(2) Suess, *Ueber die Brachiopoden d. Kössener Schichten*, 1854, pag. 24, tav. II, fig. 6.

slongc. (non Zieten) (1), dalla quale si separano per la forte gonfiezza e per l'area non limitata acutamente; gli altri costati rammentano la *Sp. pinguis* Ziet. sp. (non Sowerby) (2), che è più depressa ed ha l'area molto più piccola.

Come si vede la *Sp. gibba* Seg. è vicina a molte specie, senza che sia possibile d'identificarla con nessuna, e perciò è giustificato il tenerla separata con nome distinto, come fece il prof. Seguenza.

Accanto agli esemplari della *Sp. gibba* descritti si notano parecchie valve isolate (tav. I., fig. 14, 15) che nei caratteri generali mostrano con essa la più intima analogia, tanto da non potersene separare nettamente. I caratteri del seno e delle coste corrispondono del tutto a quelli della *Sp. gibba*, e la forma, benchè più svelta per la elevatezza e l'acutezza dell'apice, è legata da innumerevoli passaggi a quella degl'individui massicci della specie del prof. Seguenza. Nondimeno a questo aspetto più elegante va unito un carattere differenziale importante, dato dagli acuti spigoli che limitano l'area, i quali non si mostrano nella *Sp. gibba*. Questo contrassegno avvicina molto tali valve alla *Sp. semiplicata* Gemm. e alla *Sp. angulata* Opp.: però la estrema grandezza del seno non permette identificarla con la prima, e la mancanza di compressioni laterali non danno a queste valve il tipo caratteristico della seconda. Tuttavia le analogie con quest'ultima sono così intime, che io riguardo tali valve come costituenti una varietà intermedia tra la *Sp. gibba* Seg. e la *Sp. angulata* Opp.

La *Sp. gibba* è molto abbondante nelle due porzioni del Lias medio del M. San Giuliano, in quello di Castelluccio (Taormina) e di Taja-di-sopra presso Caltabellotta (Girgenti).

L'esemplare bivalve figurato ha le seguenti dimensioni:

Lunghezza	27mm.
Larghezza	27.
Spessore	23.

(3) Deslongchamps, *Études critiques sur des brachiopodes nouveaux ou peu connus*, pag. 13, tav. II, fig. 10, 11.

(4) Zieten, *Die Versteinerungen Würtembergs*, pag. 51, tav. XXXVIII, fig. 5.

Le misure di alcune valve perforate sono le seguenti:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Lungh.	29mm.	18mm.	15mm.	17mm.	18mm.	19mm.	22mm.
Largh.	27.	23.	20.	27.	21.	28.	17.

Quelle di alcune valve imperforate:

	I.	II.	III.	IV.	V.
Lungh.	28mm.	17mm.	19mm.	12mm.	16mm.
Largh.	26.	27.	28.	18.	24.

Spirifirina Münsteri Davids.

1830. *Spirifer octoplicatus* Zieten (non Sowerby), Die Versteinerungen Würtembergs, pag. 51, tav. XXXVIII, fig. 6*a*, *e*.

1847. „ „ Davidson, London Geological Journal, N. III, pag. 113, tav. XVIII, fig. 11-14.

1851. „ *Münsteri* Davidson, A Monograph of british oolitic and liassic Brachiopoda (Palaeont. Society of London) pag. 26, tav. III, fig. 4-6.

1852. „ „ Davidson, Annals and Magazine of. Nat. hist., S. 2, vol. IX, pag. 15, tav. XV, fig. 8-9.

1853 „ *octoplicatus* Oppel, Der mittere Lias Schwabens, pag. 72, tav. IV, fig. 3.

1858. „ *betacalcis* Quenstedt, Der Jura, pag. 146, tav. 18, fig. 16.

1858. „ *Walcotti* Quenstedt, Ibid., pag. 99, tav. 12, fig. 16.

1874. *Spiriferina Münsteri* Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con *T. Aspasia* della provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 57, tav. X, fig. 8, 9.

1876. *Spiriferina Münsteri* Davidson, Supplement to the british jurassic and triassic Brachiopoda (Palaeont. Society of London) pag. 101.
1886. „ „ Rothpletz, Geologisch-palaeontologische Monographie der Vilser Alpen (Palaeontographica, 33 Bd.), pag. 163.

Questa specie è molto abbondante negli strati bassi ed elevati del Lias medio del M. San Giuliano, ove è rappresentato da piccoli esemplari, corrispondenti in tutto a quelli di S. Anna presso Giuliana (Palermo) illustrati dal prof. Gemmellaro.

I molti individui studiali sono più larghi che lunghi, talora tanto larghi che lunghi o più lunghi che larghi, ornati di 12-14 coste angolose e larghe. La valva imperforata, non molto convessa, porta un lobo mediano largo, elevato e subangoloso sopra, al quale corrisponde sulla valva perforata un seno profondo e angoloso al fondo, che parte dall' apice. Questo è elevato, appuntito e poco curvo. L' area è larga, piana e nettamente limitata; la fessura deltidiale è alta e stretta; la linea cardinale diritta e lunga quanto la larghezza della conchiglia. Sull' apice di alcuni esemplari si nota un setto corto e due lamine rostrali, le cui estremità inferiori convergono verso il setto.

La superficie delle valve è coperta di tubercoli minuti e largamente spaziati fra di loro.

Gli esemplari siciliani, sempre piccoli, hanno le coste meno larghe di quelle degli esemplari figurati dal Davidson, nondimeno essi non possono separarsene.

Var. **recondita** Seg.

1885. *Spiriferina recondita* Seguenza, Le Spiriferina dei varii piani del Lias messinese (Boll. della Soc. geol. ital., vol. IV) pag. 438, tav. XIX, fig. 10, 10*a*, 10*b*, 10*c*.

1886. *Spiriferina recondita* Di-Stefano, Il Lias inferiore di Taormina e de' suoi dintorni, pag. 46, tav. I, fig. 19-25.

L'esame recente di un gran numero di esemplari della *Sp. recondita* Seg., e della *Sp. Münsteri* Davids., mi fa certo che la specie del prof. Seguenza deve riunirsi a quest' ultima; però la *Sp. recondita* raggiunge dimensioni molto maggiori di quelle della *Sp. Münsteri* Davids., è per lo più molto slargata trasversalmente, mostra spesso un maggior numero di coste (12-20), ed è coperta di tubercoli minuti e fittissimi. Questo carattere dei fitti tubercoli, in opposizione a quello della *Sp. Münsteri* Davids., che li ha più grossi e largamente spaziati fra di loro, può permettere di riguardare la *Sp. recondita* Seg., come una varietà della specie del Davidson, intermedia tra questa e la *Sp. oxygonia* Deslongc (1). La *Sp. Münsteri* Davids., var. *recondita* Seg., è infatti assai vicina alla *Sp. oxygonia* Deslongc., dalla quale differisce solo per l'area molto più stretta, per l'apice più appuntito e ristretto sui lati e per le coste meno larghe e meno elevate.

Come è stato notato più volte, la *Sp. Münsteri* Davids., ha strette analogie con la *Sp. Walcotti* Sow., sicchè se ne è proposta la riunione, contro la quale si è pronunziato il Davidson. Gli esemplari della *Sp. Münsteri* Davids., e della var. *recondita* Seg. del M. San Giuliano, di Castelluccio (Taormina) e di Sant' Anna presso (Palermo), paragonati con parecchi belli individui della *Sp. Walcotti* Sow., provenienti dal Gloucester (Inghilterra) e conservati nelle collezioni del Museo geologico dell' Università di Palermo, se ne differiscono pertanto per le minori proporzioni, per le coste più nu-

---

(1). L'esemplare della Sp. *recondita* Seg., figurato dal prof. Haas (*Étude manogr. et crit. des brachiopodes* ecc. tav. II, fig. 26-29) non fa decidere per causa del suo cattivissimo stato di conservazione se spetti veramente alla *Sp. Münsteri* Davids., var. *recondita* Seg., alla tipica *Sp. Münsteri* o a tutt'altra specie.

(2) Deslonchamps *Mèmoire sur la couche a Leptaena du lias* ecc., 1859 (Bul. de la Soc. linn. de Normandie, III) tav. IV, fig. 4-10.

merose e più strette, per l'apice più alto, spinto indietro e quasi diritto e per l'area più alta e piana.

La *Sp. Münsteri* Davids. si raccoglie in Inghilterra nel Lias medio e nel superiore (Davidson); in Francia, in Germania e nelle Prealpi italiane nel Lias medio; in Portogallo nella parte superiore di quel Lias inferiore (Choffat).

Gen. RHYNCHONELLA Fischer v. Waldheim.

Rhynchonella curviceps Quenst. sp.

(Tav. II, fig. 2.)

1852. *Terebratula tetraedra β* Quenstedt, Handbuch der Petrefactenkunde, pag. 138, tav. 17, fig. 13-15.
1858. „ *curviceps* Quenstedt, Der Jura, pag. 138, tav. 17, fig. 13-15.
1867. „ *tetraedra* Quenstedt, Handbuch der Petrefactenkunde, pag. 541, tav. 46, fig. 90.
1871. „ *curviceps* Quenstedt, Petrefactenkunde Deutschlands; Brachiopoden, pag. 57, tav. 37, fig. 118-127.
1871 „ *amalthei curviceps* Quenstedt, Ibid., pag. 66, tav. 37, fig. 160.
1882. *Rhynchonella curviceps.* Haas und Petri, Die Brachiopoden der J. - Formation von Elsass-Lothringen (Abhandl. z. geol. spez. Karte von Els.-Loth., II) pag. 188, tav. I, fig. 24, 28, 30; tav. III, fig. 32-36, 38-42.
1885. *Terebratula tetraedra β* Quenstedt, Handbuch der Petrefactenkunde, pag. 691, tav. 53, fig. 46.

1886. *Rhynchonella curviceps* Di-Stefano, Sul Lias inferiore di Taormina e de' suoi dintorni, (Giorn. di Sc. Nat. ed Econ. di Palermo, vol. XVIII.) pag. 102, tav. II, fig. 25-29.

Gli esemplari di questa specie raccolti nel Lias medio del M. San Giuliano sono piccoli o di discrete dimensioni, più larghi che lunghi, tanto larghi che lunghi e in varj casi più lunghi che larghi, sempre assai globulosi per causa del forte rigonfiamento della valva imperforata e pel rapido inflettersi delle coste verso la regione frontale. La loro fronte è perciò altissima rispetto alle proporzioni della conchiglia. Il seno della valva perforata e il lobo dell' imperforata sono larghi, ma molto leggieri e talvolta appena accennati; però il seno si prolunga alla fronte in un lungo lembo.

L' apice è appuntito, molto curvato, più o meno compresso sulla valva imperforata e con angoli laterali distinti, ma non molto acuti, come invece sono spesso negl'individui tedeschi di questa specie. La superficie della conchiglia è fibrosa ed ornata di 18-25 coste angolose, delle quali 5-8 si presentano sul lobo, che non sempre è ben distinto dalle parti laterali della conchiglia.

Gl' individui studiati corrispondono benissimo con quelli tipici della *Rh. curviceps* Quenst. sp., che mi furono già mandati per paragone dal prof. Haas, e con quelli del Lias di Taormina.

La *Rh. curviceps* è stata spesso confusa con la *Rh. tetraedra* Sow. per causa dei dispareri sul modo di comprendere questa specie inglese, e perchè, a dir vero, le è vicinissima. I molti esemplari del M. San Giuliano mostrano infatti che le due specie passano l' una all' altra per forme intermedie; nondimeno gl' individui ben caratterizzati delle *Rh. curviceps* differiscono dalla *Rh. tetraedra* per le costanti minori proporzioni, per loro aspetto non alato lateralmente, ma meno slargato per causa della compressione sui fianchi della conchiglia, più globulare e ventricoso per l' altezza della fronte cagionata dal forte e rapido curvarsi delle coste e non dal lobo, che insieme al seno è sempre debole e per lo più non ben definito.

Questa specie è rara nella parte inferiore del Lias medio in esame e abbondante nella superiore. In Sicilia si raccoglie anche nel Lias inferiore di Taormina. Essa si presenta nel Lias inferiore dell'Est della Francia (1) e nel Lias medio dell'Alsazia-Lorena, in quello della Germania e, a quanto pare, in quello dell'Inghilterra.

Alcuni degli esemplari studiati hanno le seguenti dimensioni:

Lunghezza	21mm.	17mm.	21mm.	18mm.	16mm.	10mm.
Larghezza	24.	19.	18.	17.	15.	9.
Spessore	19.	16.	17.	17.	15,	9.

Rhynchonella tetraedra Sow. sp.

(Tav. II, fig. 3).

1812. *Terebratula tetraedra* Sowerby, Mineral Conchology of Great Britain, pag. 191, tav. 83, fig. 5.

1828. „ „ Young and Bird, Geological Survey of the Yorkshire Coast, tav. VIII, fig. 15.

1851. *Rhynchonella tetraedra* Davidson, A. Monograph of british oolitc and liassic Brachiopoda (Palaeont. Society of London) pag. 93 tav. XVIII, fig. 5-9 (esclusa fig. 10).

1871. *Terebratula tetraedra* Quenstedt. Petrefactenkunde Deutschlands; die Brachiopoden, pag. 59, fig. 126 (Hilminster).

1876. *Rhynchonella tetraedra* Tate and Blacke, The Jorkshire Lias, pag. 420, tav. XV, fig. 20.

1878. „ „ Davidson, Supplement to the brit. jurassic and triassic Brachiopoda (Palaeont. Society of London) p. 198, fig. 6-12 (eselusa fig. 5).

---

(1) Terquem et Piette, *Le Lias inférieur de l'Est de la France*; Paris, 1845 (Mém. de la Soc. géol. de France, 2 S. T. VIII, pag. 115)

1884. *Rhynchonella tetraedra* (?) Parona, I brachiopodi liassici di Saltrio e Arzo nelle Prealpi lombarde (Mem. dell' Istituto lombardo) p. 17, tav. II, fig. 5.

Conchiglia più larga che lunga, o tanto larga che lunga, spessa, subpentagonale, con l'apice basso, acuto, molto curvato e fornito di angoli laterali acuti. Forame piccolo, formato sotto dal deltidio, che è largo. Valva imperforata molto più convessa dell' altra, munita sulla regione frontale di un lobo molto elevato, diviso dalle parti laterali della conchiglia da spazj distinti, però non molto larghi. Valva perforata depressa, provvista di un seno largo e profondo, che comincia debolissimo sulla metà superiore della conchiglia e si fa forte alla fronte, prolungandosi e inflettendosi verso la valva imperforata.

La superficie della conchiglia è ornata di 26-30 coste forti e angolose, delle quali 6-10 si presentano sul lobo e 8-12 su ogni lato di essa.

L'unione delle valve si fa con angolo ottuso, e la loro linea commessurale, leggermente arcuata sui fianchi, diviene fortemente sinuosa alla fronte: essa è inoltre assai dentata sui lati e sulla fronte.

Gli esemplari simili a quello figurato, paragonati con i molti e belli individui della *Rh. tetraedra* Sow. sp. provenienti dal Lias del Gloucestershire (Inghilterra) e conservati nel Museo geologico dell' Università di Palermo, (individui corrispondenti a quelli rappresentati dal Davidson nella tav. XVIII, fig. 5-9 della sua *A Monograph of brit. oolitic* ecc.), vi somigliano in modo che mi pare impossibile di separarneli. Certamente la loro valva imperforata mostra una convessità leggermente minore di quella che si osserva sugli esemplari inglesi, nè il loro apice è sempre compresso sull' umbone della valva imperforata: ma io ho notato che simili variazioni si osservano anche su molte forme inglesi, che nondimeno non possono separarsi dalle forme tipiche.

Accanto agli esemplari del M. S. Giuliano descritti se ne no-

tano non pochi altri che per le coste più fine, ma soprattutto pel lobo frontale basso e la minore convessità, rammentano a prima vista quell' individuo del Lias medio di Laurac (bacino del Rodano) riferito dal Dumortier (1) alla *Rh. tetraedra* Sow. sp., e che ne sembra piuttosto una varietà; e altri molto convessi, ma col lobo meno distinto, i quali fanno passaggio alla *Rh. curviceps.* Quenst. La *Rh. tetraedra* e la *Rh. curviceps* sono infatti due specie assai vicine e intimamente legate; però gli esemplari della vera *Rh. curviceps* di Sicilia (M. San Giuliano e Taormina) si distinguono dalla *Rh. tetraedra* non solo perchè costantemente di dimensioni minori, ma, giova ripeterlo, per la forma assai più globulare, dovuta alla maggiore convessità della valva imperforata, pel seno ristretto e leggerissimo, pel lobo indistinto o mancante, e per la grande altezza della fronte, causata non dal lobo, come avviene nella *Rh. tetraedra*, ma dal più forte e rapido curvarsi delle coste verso la fronte. Noto anche che la *Rh. curviceps*, non è alata lateralmente, o per lo meno non così come lo è la *Rh. tetraedra*, e che suole essere più allungata.

L'esemplare del Lias medio di Arzo, figurato dal dott. Parona nel lavoro citato sopra, somiglia molto alla *Rh. curviceps;* nondimeno per la minore convessità e pel lobo distinto non si può recisamente associare a questa specie. Però è da notare che neanco corrisponde bene, per la sua forma molto allungata, agli esemplari tipici della *Rh. tetraedra* Sow. sp.

La *Rh.* cfr. *tetraedra* Sow. sp., che il Parona figura nella tav. III, fig. 3, del lavoro " *Il calcare liassico di Gozzano* ecc. ", è certamente assai vicina alla *Rh. tetraedra*, come ce la rappresenta il Davidson; però non può, pel suo debole lobo, associarsi alle grosse forme tipiche. Essa rammenta quella *Rhynchonella* del Bacino del Rodano riferita dal Dumortier alla *Rh. tetraedra*, della quale si parlò più su, e insieme alla quale potrebbe costituire una varietà e forse una specie distinta.

---

(1) Dumortier, *Études paléontologiques sur les dépôts jurassiques du bassin du Rhône; Lias moyen*; pag. 330, tav. XLII, fig. 11, 12.

Come è noto, c' è stata sinora confusione nel modo d'intendere la *Rh. tetraedra* Sow. sp., perchè il Soverby la indicò nel Fuller' s Earth di Aynohe e nell' Oolite di Banbury (Oxfordshire), il Morris (1) nell' Oolite e nel Chelloviano, il v. Buch (2) nel Lias e nel Dogger ecc. Però ben notò il Davidson (*A Monograph* ecc., pag. 15) che nessun esemplare del Dogger riferito alla *Rh. tetraedra* da lui esaminato, corrisponde al tipo del Sowerby, da lui studiato direttamente. Per tal ragione egli finì col dare la denominazione del Sowerby solo agli esemplari liassici e col chiamare *Rh. subdecorata* quella specie dell' Oolite inferiore di Cheltenham, che egli nel 1851 aveva associato con dubbj alla *Rh. tetraedra*. Or è certo che le due figure del Sowerby corrispondono bene ai grandi esemplari del Lias inglese, e che il vero tipo del Sowerby non è stato mai trovato nel Dogger e nel Malm; per questo possiamo ritenere la *Rh. tetraedra* Sow. sp. come una specie liassica, staccando da essa quelle piccole forme indicate talora collo stesso nome dal v. Buch e dal Quenstedt e che invece appartengono all' affine *Rh. curviceps* Quenst. sp.

I piccoli esemplari figurati dal Davidson col nome di *Rh. tetraedra* var. *Northamptonensis* (*Supplement* ecc., tav. XXIX, fig. 7-12) sembrano varietà della *Rh. tetraedra* che passano alla *Rh. curviceps*. La var. *Dumbletonensis* Davids. (*Supplement* ecc. pag. 199, tav. XXIX, fig. 5,) mi pare che abbia i caratteri di una specie differente dagli esemplari grandi e gonfi che costituiscono la *Rh. tetraedra* tipica. Essa è molto vicina alla *Rh. Rosenbuschi* Haas dell' Asalzia-Lorena.

La *Rh. tetraedra* Sow. sp. si raccoglie negli strati inferiori e superiore del Lias medio del M. S. Giuliano. Essa si presenta inoltre nel Lias medio delle Alpi di Vils e in quello delle Prealpi italiane (Gozzano); nel Lias inferiore portoghese, e nell' inferiore e medio della Francia e dell' Inghilterra, nonchè in quello superiore inglese (Davidson).

---

(1) Morris, *A Cataloque of British Fossils* ecc., 1854.

(2) v. Buch, *Éssai d'une classification et d'une déscription des Térébratules*, 1838 (Mem. de la Soc. geol. de France, vol. III,) pag. 140.

L' esemplare figurato ha le seguenti dimensioni:

	I.	II.	III.
Lunghezza	23mm.	23mm.	23mm.
Larghezza	28.	22.	25.
Spessore	18.	18.	17.

Rhynchonella serrata Sow. sp.

(Tav. II, fig. 4, 5.)

1825. *Terebratula serrata* Sowerby, Mineral Conchology of Great Britain, vol. V, pag. 168, tav. 503, fig. 2.

1851. *Rhynchonella serrata* Davidson, A Monograph of british oolitic and liassic Brachiopoda (Palaeont. Society of London) pag. 85, tav. XV, fig. 1, 2.

1874 „ „ Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con *T. Aspasia* della provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liassiche della Sicilia) pag. 80, tav. XI, fig. 24.

1880 „ *discoidalis* Parona, Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili (R. Acc. dei Lincei, a. CCLXXVII) pag. 23, tav. III, fig. 5.

Questa specie è rappresentata nel Lias medio del M. San Giuliano da due serie di forme, una costituita da esemplari piccoli o di discreti dimensioni, con 12-16 coste un po' strette e con il lobo e il seno pochissimo distinti (tav. II. fig. 4), corrispondenti all'esemplare del Lias medio della Montagnola di S. Elia (Palermo)

figurato dal prof. Gemmellaro, e perciò alla varietà allungata della specie inglese, e l'altra da individui più grandi (tav. II, fig. 5), più allungati, forniti di un lobo e di un seno ben distinti e largamente separati dalle parti laterali della conchiglia, nonchè di coste molto larghe, tettiformi e di numero minore (9-12). Se si vuole dare molto valore al numero minore di coste e segnatamente al carattere del lobo e del seno ben distinti, questa seconda serie di esemplari potrà indicarsi col nome di var. *Kiliani*. Riesce impossibile di poter separare questa varietà dalla *Rh. serrata* Sow. sp., perchè è legata intimamente con essa da forme intermedie, che passano alla varietà allungata della specie inglese pel moltiplicarsi del numero delle coste e per l'indebolirsi del lobo della valva imperforata e del seno di quella perforata.

La var. *Kiliani* serve a rilegare alla *Rh. serrata* la *Rh. Scherina* Gemm. e la *Rh. quinqueplicata* Ziet. sp. (1) La prima di queste due specie, ben distinta dagli esemplari tipici dalla *Rh. serrata* e dalla varietà ora descritta, passa nondimeno all'una e all'altra per l'indebolirsi del lobo e del seno, per le coste che divengono più strette e di numero maggiore e per la perdita delle forti ali laterali. Solo le depressioni sui fianchi sogliono mantenersi sempre un po' più forti. La var. *Kiliani* però non potrebbe aggregarsi alla *Rh. Scherina*, perchè ne è distinta dalle depressioni laterali più corte, più strette e più leggiere, dalla forma assai più stretta e dalla maggiore larghezza del suo angolo apiciale. La *Rh. quinqueplicata* Ziet. ha veramente strette analogie con la var. *Kiliani*. Il Quenstedt infatti ripetutamente notò (2) gl'intimi rapporti della specie di Zieten con le forme allargate della *Rh. serrata* e la possibilità della loro riunione; nondimeno la *Rh. quinqueplicata* ha la fronte troppo sporgente e il seno e il lobo troppo forti e definiti per potersi riunire alla *Rh. serrata* o alla descritta varietà. Questa però può riguardarsi

---

(1) Zieten, *Die Versteinerungen Würtembergs*, pag. 55, tav. XLI, fig. 2.

(2) Quenstedt, *der Jura*, pag. 178 — *Petrefactenkunde Deutschlands; die Brachiopoden*, pag. 67—*Handbuch der Petrefaktenkunde*, 1885, pag. 691.

anche come formante il passaggio dalla specie dello Zieten a quella del Sowerby.

La *Rh. discoidalis* Parona del Lias medio di Gozzano è estremamente vicina alle varietà allargate della *Rh. serrata* e mi pare che non possa separarsene. Il carattere della fronte attenuata che si nota nell' esemplare gozzanese potrebbe servire per fondare una varietà, ma non una specie distinta.

La *Rh. serrata* con coste relativamente strette e lobo indistinto si raccoglie con discreta frequenza negli strati inferiori del Lias medio del M. San Giuliano; la sua varietà a lobo distinto in quelli alti e bassi.

Questa specie si trova inoltre in Sicilia nel Lias medio della Montagnola di S. Elia presso Palermo, in quello di Sant' Anna di Giuliana (Palermo), e del promontorio di Castelluccio. Si presenta poi nel Lias medio inglese, in quello dell' Appennino centrale, di Gozzano (Piemonte), delle Alpi di Vils, di Salinas nell' Andalusia (Spagna) ecc. Choffat la indica con dubbio negli strati portoghesi di passaggio al Lias superiore.[1]

Alcuni esemplari della *Rh. serrata* tipica hanno le seguenti dimensioni:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Lunghezza	27mm.	25mm.	20mm.	21mm.	21mm.	20mm.
Larghezza	24.	23.	19.	19.	20.	19.
Spessore	18.	18.	16.	15.	19.	19.

Gl'individui della varietà a grosse coste e lobo distinto offrono le misure seguenti:

	I.	II.	III.	IV.	V.
Lunghezza	29mm.	28mm.	27mm.	26mm.	24mm.
Larghezza	25.	26.	25.	23.	23.
Spessore	20.	20.	19.	19.	16.

Rhynchonella Scherina Gemm.

1874. *Rhynchonella Scherina* Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con *Ter. Aspasia* della provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia), pag. 81, tav. X, fig. 24.

1880. „ „ Parona, Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili (R. Acc. dei Lincei, a. CCLXXVII) pag. 19, tav. II, fig. 9-11.

1884. „ „ Parona, I briachiopodi liassici di Saltrio e Arzo nelle Prealpi lombarde (Mem. del R. Istituto lomb.) pag. 243.

Nel calcare grigio della parte inferiore del Lias medio del M. San Giuliano ho raccolto varj esemplari di una grande *Rhynchonella*, che per le forti, concave ed estese depressioni laterali, per l' apice appuntito e ricurvo sulla valva imperforata, per le forti coste (8-12) e per l' aspetto chiaramente trilobato, corrispondono in tutto alla *Rh. Scherina* Gemm., della quale ho studiati gli esemplari originali.

La *Rh. Scherina* Gemm. passa alla *Rh. serrata* Sow. sp. per mezzo di varie forme intermedie, che per l' aspetto e per le coste più numerose e più strette si avvicinano molto alla specie del Sowerby.

L' individuo della *Rh. Scherina* figurato dal dott. Parona nel suo bel lavoro " *Il calcare liassico di Gozzano* „ segna il passaggio di questa specie alla varietà della *Rh. serrata* da me chiamata var. *Kiliani*.

La *Rh. Scherina* Gemm. si presenta nel Lias medio di Sicilia a Sant'Anna presso Giuliana (Palermo), a Chiusa-Scafani (Palermo) a Galati presso Messina, al promontorio di Castelluccio (Taormina); nel continente italiano nel Lias medio di Gozzano (Piemonte) e di Arzo (Lombardia).

Rhynchonella Glycinna Gemm., var.

(Tav. II, fig. 6a, b, c, d.)

1874. *Rhynchonella Glycinna* Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con *Ter. Aspasia* Mgh. della provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liassiche della Sicilia) pag. 82, tav. X, fig. 25.

Negli strati inferiori del Lias medio di M. S. Giuliano e nel calcare rosso con crinoidi del Lias medio di Galati si raccoglie una *Rhynchonella* appartenente certo alla *Rh. Glycinna* Gemm., ma che ne differisce nondimeno per alcuni importanti contrassegni. I caratteri degli esemplari osservati sono i seguenti:

Conchiglia fortemente triangolare ed acuta sopra, più lunga che larga o tanto larga che lunga, depressa, munita sui lati di due depressioni lunghe, assai forti, piane o leggermente concave. La valva imperforata, tanto convessa quanto l' altra, porta un lobo mediano elevato e molto largo, distintamente separato dalle parti laterali della conchiglia, al quale corrisponde sulla valva perforata un seno largo e profondo, che comincia leggierissimo sulla metà della lunghezza della conchiglia o un po' sopra.

L' apice è molto basso, piccolo, appuntito e discretamente curvato; esso nondimeno tocca quasi l' umbone della valva imperforata, il quale è piuttosto elevato e nasconde in gran parte il deltidio, che è piccolo e basso. La linea cardinale è fortemente arcuata.

L' unione delle valve si fa con angolo molto ottuso, e sui lati nello stesso piano. La linea commessurale, salvo due leggiere arcuazioni ai lati della linea cardinale, scende diritta alla fronte, dove diventa largamente sinuosa e dentata.

La superficie della conchiglia è ornata di 5-8 coste angolose ed assai larghe, delle quali se ne contano 2-4 sul lobo e 1-2 sopra ogni lato. È da notare che talune coste sono più deboli delle altre e che qualcuna svanisce prima di giungere alla fronte.

Questi caratteri legano strettamente gli esemplari in esame alla *Rh. Glycinna* Gemm.; però per le differenze dovute alla forma molto acuminata sopra e perciò allo strettissimo angolo apiciale, alle depressioni laterali più forti ed estese e alla minore convessità della conchiglia ne costituiscono una varietà.

La *Rh. Glycinna* Gemm. tipica, cioè a valve gonfie e con forma assai meno acuta sopra, si raccoglie in Sicilia nel Lias medio di Galati (Messina) e di Chiusa-Sclafani (Palermo); la varietà descritta a Galati e al M. San Giuliano.

L' esemplare figurato, che proviene da Galati, offre le seguenti dimensioni:

Lunghezza 24mm.
Larghezza 23.
Spessore 13.

Rynchonella palmata Opp.

(Tav. II, fig. 7a, b, c.)

1861. *Rhynchonella Greppini* Oppel, var. *palmata* Oppel, Ueber die Brachiopoden des untern Lias (Zeitschrf. d. deutsch. geol. Gesellschf., XIII Bd.) pag. 545, tav. XIII, fig. 2*a. b, c.*

1879. „ *palmata* Uhlig, Ueber die liasische Brachiopodenfauna von Sospirolo bei Belluno (Sitzb. d. Akad. d. Wissenschft.) pag. 40, tav. V, fig. 4.

1884. „ *Greppini*, Oppel, var. *palmata* Haas (p. p.), Beiträge zur Kenntniss der liasischen Brachiopodenfauna von Südtyrol und Venetien, pag. 13, (tav. I, fig. 2)?, tav. II, fig. 8, (esclusa tav. II, fig. 3).

1889. *Rhynchonella palmata* Geyer, Ueber die liasischen brachiopoden des Hierlatz bei Hallstatt (Abhandl. d. k. k. geol. R. A. Bd. XV) pag. 50, fig. 11-14.

Conchiglia triangolare, depressa, subequivalve, escavata ai lati, rialzata agli angoli della fronte. Valve egualmente e poco convesse, senza lobo nè seno, riunite nello stesso piano sui lati e sulla fronte. L'apice è basso, discretameute largo, appuntito all'estremità, assai curvo, compresso sulla valva imperforata e fornito di due angoli laterali ben distinti e lunghi. La linea cardinale è molto arcuata. La fronte è ingrossata, rapidamente troncata e leggermente arcuata, con la convessità diretta fuori. La linea commessurale sui lati siegue lievemente l'arcuazione degli angoli apiciali o è quasi diritta; essa taglia il mezzo delle lunghe e concave depressioni laterali, e diviene fortemente dentata alla fronte.

La superficie della conchiglia è ornata di 7-8 coste grossolane, che partono leggerissime dagli apici e alla fronte s'ingrossano rapidamente e divengono un po' angolose. In qualche caso esse si biforcano sulle regioni apiciali.

Gli esemplari studiati sono veramente tipici; io ho potuto assicurarmene col diretto paragone di parecchi belli esemplari della *Rh. palmata* Opp. tipica provenienti da Hierlatz e conservati nel museo geologico dall'Università di Palermo. Essi sono in istretta relazione con la *Rh. Greppini* Opp.; ma se ne distinguono per l'aspetto più fortemente triangolare, per la forma più larga, per le più estese depressioni laterali e pel carattere della commessura, che taglia l'appiattimento laterale non obliquamente ed è per lo più lievemente arcuata secondo l'andamento degli angoli apiciali, nonchè per la mancanza di seno e di lobo frontale.

Il Geyer pone la *Rh. Desori* Haas nella *Rh. palmata* Opp., pel carattere della commessura; a me pare invece che la specie del dott. Haas sia molto più vicina alla *Rh. Dalmasi* Dum., sì per l'aspetto generale, che per l'intensità dell'arcuazione della commessura laterale. Questa è lievemente arcuata oppure quasi diritta nella *Rh.*

palmata Opp., secondo si nota sugli esemplari di Hierlatz del Museo di Palermo, su quelli figurati dall' Oppel e dal Geyer e sugli individui siciliani, e taglia spesso, sebbene non sempre, il mezzo dell' appiattimento laterale; invece nella *Rh. Desori* Haas essa è assai più fortemente arcuata e regolarmente fino alle estremità della linea frontale ed è vicinissima ai lunghi angoli apiciali, in modo che l' appiattimento laterale è formato per la massima parte dalla valva imperforata, mentre è da notare che nella *Rh. palmata* Opp. la valva perforata prende nella formazione dell' appiattimento laterale parte maggiore.

Gli esemplari detti *Rh. Greppini* Opp., var. *palmata* Opp. dal dott. Haas nel suo lavoro sui brachiopodi liassici del Tirolo e del Veneto, non possono tutti riferirsi alla *Rh. palmata* Opp.: l' individuo della tav. 11, fig. 8, pel carattere delle coste e della forma, mi pare che possa aggregarvisi, mentre quello della tav. 11, fig. 3, è un esemplare della *Rh. Greppini* Opp.; quello della tav. I, fig. 2 non permette un giudizio sicuro pel suo cattivissimo stato di conservazione.

La *Rh. cuneiformis* Can. (1) del Lias medio dell' Appennino centrale (Rocchetta) è, per l' aspetto, molto vicina alla *Rh. palmata;* essa però se ne differisce bene per la forte arcuazione della commessura laterale verso la valva perforata. La *Rh. Capellinii* Par. (2) del Lias medio di Papigno (Appennino centrale) ha, per la sua forma molto triangolare, strette relazioni con la *Rh. palmata*, il cui apice, contrariamente a quanto scrive il Geyer, non mi pare molto differente da quello della specie del Parona. Però il leggiero indizio di seno frontale sulla valva imperforata e i corti appiattimenti laterali avvicinano la *Rh. Capellinii* Par. alla *Rh. Greppini* Opp., della quale potrebbe considerarsi come una varietà che segna il passaggio agli individui multicostati della *Rh. palmata.* Sulle relazioni con la *Rh.*

(1) Canavari, *Contribuzione III alla conoscenza dei brachiopodi degli strati a T. Aspasia* ecc., pag. 12, tav. XII, fig. 2.

(2) Parona, *Contributo allo studio della fauna liassica dell' Appennino Centrale,* pag. 105 tav. IV. fig. 5, 6.

dolabriformis Mgh. è discorso appresso. La *Rh. palmata* è anche in rapporti con la *Rh. orthoptycha* Opp. (3) degli strati di Klaus, con la *Rh. rectecostata* Uhl. (4) e, per mezzo degli esemplari a molte coste, con la *Rh. trigona* Quenst. (5) del Calloviano di Windschgarsten e del Dogger delle Alpi di Vils (Rothpletz), nonchè con la *Rh. Nicolisi* Par. (6) del Malm.

La *Rh. palmata* si raccoglie in Sicilia al M. San Giuliano e a Galati (Rocche rosse); fuori, a Hierlatz, a Sospirolo, nel Lias inferiore della Selva Baconica e nel medio dei dintorni di San Cassiano (Tirolo).

L'esemplare figurato in questo lavoro proviene dal Lias medio di Galati (contrada Rocche rosse sul M. Ucina); l' ho fatto rappresentare perchè, essendo dei meglio conservati, può servire bene a mostrare i caratteri che offre in Sicilia questa specie. Esso ha le seguenti dimensioni:

Lunghezza	17mm.
Larghezza	20.
Spessore	10.

Rhynchonella Dalmasi Dum.

(Tav. II, fig. 8-12)

1869. *Rhynchonella Dalmasi* Dumortier, Études paléontologiques sur les dépôts jurassiques du bassin du Rhône; Lias moyen, pag. 33, tav. XLII, fig. 3, 4, 5.

---

(3) Oppel, *Ueber das Vorkommen non jurassischen Posidonomyen-Gesteinen in den Alpen* pag. 213, tav. VII, fig. 5-7.

(4) Uhlig, *Ueber die Fauna des rothen Kellowaykalkes der penninischen Klippe Barbierzówka bei Neumarkt in West-Galizien* (Jarb. d. K. K. geol. R. A. 1881) pag. 421.

(5) Quenstedt, *Petrefaktenkunde Deutschlands*; *Brachiopoden*, tav. 40, fig. 70-71.

(6) Nicolis e Parona, *Note stratigrafiche e paleontologiche sul Giura superiore della provincia di Verona*, 1885, pag. 56, tav. IV, fig. 2 (Bull. d. Soc. geol. ital. vol. IV).

1889. *Rhynchonella Dalmasi* Kilian, Études paléontologiques sur les térrains sécondaires et tertiaires de l'Andalousie (Mission d'Andalousie. Mémoires de l' Acad. des Sciences, t. XXX) pag. 612, tav. XXIV, fig. 6*a*, *d*.

Conchiglia fortemente triangolare, talvolta asimmetrica per leggiero ineguale sviluppo delle sue parti laterali, molto spessa, assai compressa su tutta la lunghezza dei fianchi, ingrossata alla fronte. La valva imperforata è molto gonfia, ma appiattita sui lati e sopra. Essa porta sulla regione frontale un seno largo e molto leggiero, non di raro scancellato, al quale corrisponde sulla valva perforata, che è assai depressa, un altro seno molto debole, ma più largo e più lungo. L'apice è piccolo, molto curvato sulla piccola valva, con angoli laterali acuti e lunghi sin quasi al principio degli angoli frontali. Il forame è piccolissimo e formato sotto dai due pezzi del deltidio, che è più piccolo e basso. La linea cardinale è molto arcuata e concava sui lati. Le lunghe depressioni laterali sono piane o assai leggermente concave; esse sono formate per la massima parte a spese della valva imperforata.

La conchiglia è ornata sulla regione frontale di 5-9 coste forti e leggermente angolose sopra, delle quali 2-5 sogliono trovarsi sul seno della valva imperforata, 3-6 su quello della perforata, 1-2 sulle parti laterali delle valve. Le coste si mostrano in generale sulla fronte, però hanno una estensione ineguale, e si spingono sopra alcuni esemplari fin oltre il mezzo della conchiglia e in qualche caso, in modo debolissimo, fino sul terzo anteriore di essa, senza pervenire mai alle estremità degli apici.

La linea commessurale sui lati è largamente e fortemente arcuata secondo l'andamento degli angoli apiciali, ai quali è vicinissima, in modo da dividere gli appiattimenti laterali della conchiglia in due parti molto ineguali. La commessura frontale è largamente e più o meno leggermente sinuata (con l'apertura della sinuosità rivolta alla valva imperforata) e fortemente dentata.

Questa specie è rappresentata da un grande numero di esem-

plari nel calcare grigio della parte inferiore del Lias medio di M. San Giuliano, mentre è un po' rara in quello bianco della parte superiore. L' abbondante materiale che ho avuto a mia disposizione mi ha permesso di fissare bene i caratteri della specie. Essa conserva sempre il suo aspetto fortemente triangolare ed è nella maggior parte dei casi più larga che lunga; però diventa talora tanto larga che lunga o un po' più lunga che larga. Lo spessore della valva imperforata è molto variabile. Ci sono due esemplari nel Museo geologico dell' Università di Palermo gonfi e con pochissime coste (non più di cinque), delle quali una sola si nota nel seno della valva imperforata, che potrebbero forse costituire una buona varietà.

Gli esemplari studiati rappresentano certo la *Rh. Dalmasi* Dum., e corrispondono benissimo agli esemplari spagnuoli di questa specie, illustrati dal Kilian, i quali mostrano tutti la valva imperforata depressa sopra.

La *Rh. Dalmasi* appartiene al gruppo della *Rh. retusifrons* Opp., con la quale è in rapporti assai stretti; però il paragone degli esemplari di M. San Giuliano, di Castelluccio presso Taormina e di Galati (Messina) con molti belli individui della *Rh. retusifrons* Opp., provenienti da Hierlatz e conservati nelle collezioni del Museo geologico dell' Università di Palermo, e con altri del Lias medio siciliano (Bisacquino e Galati), mi ha convinto che le due serie d'individui si debbono tenere separate specificamente. La *Rh. Dalmasi* si distingue infatti dalla *Rh. retusifrons* per la sua forma sempre più fortemente triangolare e meno dilatata, per le depressioni laterali assai forti e molto lunghe, pel carattere della valva imperforata più appianata sopra e per quello della perforata, che è molto più depressa che non sia nella specie di Oppel. Inoltre è da notare che la *Rh. Dalmasi* raggiunge spesso dimensioni molto maggiori.

La *Rh. Desori* Haas del M. Lavarella presso S. Cassiano mi pare che abbia la più intima analogia con la *Rh. Dalmasi*: la sua forma, l' andamento della linea commessurale sui lati, il modo di formazione delle depressioni laterali a spese della valva imperforata

e il carattere delle coste corrispondono infatti perfettamente ai caratteri della specie del Dumortier. Mostrai avanti come essa si discosti dalla *Rh. palmata* Opp., con la quale il Geyer vorrebbe aggregarla. Per queste ragioni io credo che la *Rh. Desori* dovrebbe riunirsi alla *Rh. Dalmasi*, molto più che sulla figura 1*c* data dal dott. Haas nel suo lavoro sui brachiopodi liassici del Tirolo meridionale e del Veneto si nota un leggiero seno frontale, nonostante che l' autore nella descrizione ne neghi l' esistenza. Però metto con qualche dubbio la *Rh. Desori* nella sinonimia della *Rh. Dalmasi* per causa della più forte convessità della valva imperforata che mostra la figura ingrandita dell' esemplare, e perchè il dott. Haas scrive che le coste cominciano proprio sulla ragione apiciale, il che però non si vede sulla figura, che invece sembra corrispondere all' esemplare della *Rh. Dalmasi* da me rappresentato nella tav. II, fig. 8.

La *Rh. dolabriformis* Mgh. (1) è una di quelle forme vicinissime alla *Rh. palmata* Opp., che pel carattere della valva perforata più depressa e per la più forte arcuazione della linea commessurale sui lati se ne discosta un po', per mettersi in rapporto con la *Rh. Dalmasi*. Essa nondimeno per l'assenza di seno frontale e per le coste estese fino agli apici non può riunirsi a questa, ed è da riguardare come un termine intermedio tra le due specie.

La *Rh. Colombi* Ren. è una specie vicina alla *Rh. Dalmasi*, ma differente, come è dimostrato nel paragrafo della *Rh. Caroli* Gemm..

La *Rh. Dalmasi* si presenta in Sicilia, oltre che nel Lias medio del M. San Giuliano, in quello delle Rocche rosse di Galati (Messina) e del promontorio di Castelluccio. Essa si raccoglie anche nel Lias medio del bacino del Rodano e dell' Andalusia (Salinas).

Le dimensioni di alcuni esemplari studiati sono le seguenti:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
Lungh.	16mm.	13mm.	14mm.	12mm.	13mm.	14mm.	12mm.	12mm.
Largh.	18.	15.	14.	14.	13.	14.	12.	13.
Spess.	10.	8.	9.	8.	8.	11.	8.	7.

(1) Canavari, *I brachiopodi degli strati a Ter. Aspasia Mgh. nell' Appennino centrale* pag 29, tav. IV, fig. 8.

Rhynchonella Caroli Gemm.

1878. *Rhynchonella Caroli* Gemmellaro, Sui fossili del calcare cristallino delle Montagne del Casale e di Bellampo (Sopra alcune faune giuresi e liasiche di Sicilia) pag. 423, tav. XXXI, fig. 79-87.

1889 *Rhynchonella Cartieri* Geyer, Ueber die liasischen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstatt (Alhandl. d. k. k. geol R. A., XV. Bd.) pag. 63, tav. VII, fig. 13-14; (fig. 15)?

Di questa specie si raccolgono nella parte inferiore del Lias medio del M. San Giuliano rari esemplari, ma ben corrispondenti agl'individui del Lias inferiore di Bellampo illustrati dal prof. Gemmellaro. I caratteri di questa specie sono sì ben descritti dal prof. Gemmellaro e dal sig. Geyer, che non vi è necessità di ripeterli.

Il sig. Geyer crede che per la specie in esame si debba adottare il nome di *Rh. Cartieri* Opp., perchè già usato per essa sin dal 1861 (1). Or è da notare che Oppel non figurò la *Rh. Cartieri*, e che solo ne parlò brevissimamente in una nota, pel che, seguendo le rette norme che ci guidano nella nomenclatura delle specie, non si è obbligati di accettare il nome di Oppel.

Dei rapporti di questa specie con la *Rh. retusifrons* Opp., con la *Rh. Colombi* Ren. (2) e con la *Rh. Lorioli* Haas (3) discorse di già bene il Geyer.

Noto qui che la forma molto triangolare, le forti e lunghe compressioni sui fianchi, le coste ottuse e le regioni apiciali lisce distinguono bene la *Rh. Dalmasi* Dum. dalla vicina *Rh. Caroli* Gemm.

---

(1) Oppel, *Über die Brachiopoden des unteren Lias*, pag. 545. (in nota)

(2) Benevier, *Notices géologiques et paleontologiques sur les Alpes vaudoises, 1866*, (Bull. de la Soc. vaud. de Sc. Nat.) pag. 84, tav. 3, fig. 6-7—Haas, *Étude mon. et crit. des. brach. rhet. et. jurass des Alpes vaudaises*, 1, pag. 22, tav. 1. fig. 17-19.

(3) Haas, *Op. cit.; II*, pag. 83, tav. VI, fig. 12.

La *Rh. Caroli*, oltre che nel Lias inferiore di Bello-lampo presso Palermo, si raccoglie in quello di Hierlatz, nell'Alpe di Vils e a Bakony.

Rhynchonella Eleuteria Di-Stef.

(Tav. III, fig. 2-8).

Descrivo questa specie sopra parecchie centinaia di esemplari del calcare bianco con crinoidi della parte superiore del Lias medio di M. San Giuliano. Essa presenta i seguenti caratteri:

Conchiglia molto spesso asimmetrica, di forma trigona-subpentagonale, acuminata sopra, in generale non molto convessa o depressa, talora un po' gonfia, fornita di un apice alto e sporgente, quasi diritto o pochissimo curvato, con angoli laterali acutissimi, imitanti una falsa area depressa sui lati. La valva perforata è molto depressa e munita di un seno frontale largo, generalmente leggiero, ma talora discretamente profondo; quella imperforata, molto più convessa e grande dell'altra, porta un lobo frontale largo e più o meno forte, separato da spazj un po' larghi dalle parti laterali della conchiglia. Lobo e seno sono spesso spostati verso un lato o l'altro della conchiglia, pel che questa diviene leggermente asimmetrica. La linea cardinale è assai arcuata. Il forame piccolo e formato sotto dal deltidio, che è piccolo e un po' alto.

La superficie delle valve è ornata di 12-18 coste forti ed angolose sopra, le quali sulla regione frontale sono sempre semplici, ma su quella apiciale o anche un po' sotto sono divise spesso da un solco in due costicine minori. Questa suddivisione è molto irregolare e non così frequente come nella *Rh. furcillata* Theod. e nella *Rh. rimosa* v. Buch, perchè un buon numero di coste rimangono semplici dagli apici alla fronte e talvolta quasi tutte. Sul lobo si contano 4-6 coste; su ogni lato delle valve 4-6.

La commessura è fortememte dentata sui lati e sulla fronte,

dove è più o meno sinuata; essa è leggerissimamente arcuata sui lati della linea cardinale. Le strie di accrescimento sono forti.

Questa specie, che gremisce il calcare bianco della parte superiore del Lias medio del M. San Giuliano, è rappresentata da esemplari in tutti gli stadj di accrescimento, in modo che fa osservare bene le sue variazioni. I piccoli esemplari sono appiattiti e mostrano sempre l' inizio della suddivisione delle coste. Tale suddivisione, quando mancano i primi strati della conchiglia, non è bene osservabile sugli esemplari grandi e piccoli, sicchè le regioni apiciali di essi sembrano lisce a occhio nudo; solo un' attenta osservazione con la lente finisce col farne osservare le tracce. La convessità della valva imperforata è variabile; infatti si passa da esemplari appiattiti ad altri discretamente convessi o quasi gonfi. Il numero delle coste è anche variabile, poichè si osservano piccoli individui con 18 coste e dei grandi con 11.

Ho lungamente esitato se dovessi separare questa *Rhynchonella* del M. San Giuliano dalla *Rh. rimata* Opp. (1), con la quale ha la più intima analogia. Pur troppo noi non abbiamo che una descrizione incompleta di questa specie e le figure di un solo esemplare, in modo che non possiamo valutare compiutamente i caratteri della specie e la sua estensione; anzi il Geyer, che pure ha potuto fare uno studio nuovo e così largo della fauna di Hierlatz non solo non descrive la *Rh. rimata* Opp., ma fa credere che questa possa essere una varietà della *Rh. Greppini* Opp. (2), il che è possibile, perchè la sola riunione

---

(1) Oppel, *Ueber die Brachiopoden des unteren Lias*, pag. 542, tav XII, fig. 2.

(2) Il sig. Geyer nel suo lavoro « *Ueber die liasischen Brachiopoden des Hierlatz ecc.* » scrive in una nota a pag. 38: « *Die Erscheinung, dass einzelne Rippen sich gegen die Stirne zu vereinigen, tritt noch bei mehreren andern Arten auf und zwar häufiger als bei R. variabilis. Man konnte solche Formen der Auffassung Stur's bei der im Museum der geologischen R. A durchgeführten Gruppirung des Materials folgend, allenfalls als Varietäten gelten lassen. Darnach muss Oppel's R. rimata (Ueber die Brachiopoden des unteren Lias ecc. pag. 542 Taf. XII Fig. 2) als Spezies eingezogen werden, dieselbe dürfte einer Rh. Greppini var. rimata entsprechen Dass die Rippenvereinegung keine specifiche Eingenschaft begründe, würde übrigens von Uhlig (Brachiopoden von Sospirolo pag. 41) und von Haas (Liasiche Brachiopoden von Südtyrol und Venetien pag. 3) angenommen.*

delle coste non è un buon carattere distintivo. Per questi dubbj sui diritti della *Rh. rimata* Opp. a essere considerata come specie distinta, e perchè la *Rhynchonella* siciliana, che è il brachiopode più abbondante del Lias medio del M. San Giuliano e caratteristico della parte superiore, se ne distingue per la forma meno dilatata per la valva perforata più depressa, per l'apice più sporgente, quasi diritto e fornito di acutissimi angoli laterali, per il numero molto maggiore di coste sui lati e per la unione di esse più rara e più irregolare, io le do un nome distinto.

La *Rh. Eleuteria* Di-Stef. ha assai stretti rapporti con la *Rh. rimosa* v. Buch sp., alla quale si avvicinano dippiù gli esemplari quasi gonfi; però il carattere dell'apice elevato, sporgente, quasi del tutto diritto e mai curvato e compresso sulla valva imperforata, il che non dà alla conchiglia l'aspetto globulare della *Rh. rimosa*, e, se si vuole, il carattere della riunione delle coste, che avviene assai meno frequentemente, in modo più irregolare e per lo più sulle regioni apiciali o appena più sotto, non ne permettono l'indentificazione.

È possibile che si voglia riguardare la *Rh. Eleuteria* come fondata sopra esemplari giovani della *Rh. furcillata* Theod. (1), e con i quali è in intima analogia; però in generale la *Rhynchonella* siciliana in esame è più depressa, fornita di coste che alla regione frontale sono sempre più strette, che si riuniscono molto più raramente e in generale mai così presso alla fronte e che non di raro si mostrano tutte o quasi tutte semplici. Tuttavia il carattere differenziale di maggiore importanza mi pare quello che per lo più suole averne meno, cioè quello delle costanti minori dimensioni della *Rh. Eleuteria*, che senza eccezione si riscontra sopra molte centinaja di esemplari in tutti gli stadj di sviluppo.

Taluni esemplari con le coste semplici o raramente riunite rammentano anche la *Rh. plicatissima* Quenst. sp. (2); ma questa è

(1) V. Buch, *Éssai d' une classification et d' une description des Terebratules* (Mem. de la Soc. géol de France, vol. III, 1838) pag. 143, tav. XIV, fig. 13.

(2) Quenstedt, *Handbuch der Petrefaktenkunde;* 1852, pag. 451, tav. XXXVI, fig. 3.

sempre più e regolarmente convessa sulle due valve, ha l'apice più curvato e le coste assai spesso più fine. Certamente ci sono individui giovani della *Rh. plicatissima* Quenst. sp. depressi; ma la loro valva perforata mai si mostra così depressa come è sempre nella *Rh. Eleuteria.*

Il Quenstedt descrive una *Rh. ammonitica* della parte inferiore del Lias inferiore del Würtemberg (1) e che sembra avere, per l'aspetto, molta relazione con la *Rh. Eleuteria*, però le figure del Quenstedt mi sembrano insufficienti per poter dare un giudizio sicuro; del resto la specie tedesca sembra più depressa, ha il lobo frontale molto basso e le coste sempre semplici, il che avviene di raro nella *Rh. Eleuteria*, e il deltidio discreto. Quest'ultimo carattere, che suol provenire dall'età, non si riscontra mai nella *Rhynchonella* siciliana su individui di quelle dimensioni o molto più piccoli.

Questa specie si trova straordinariamente abbondante solo nella parte superiore del Lias medio del M. San Giuliano. Le dimensioni di alcuni esemplari sono le seguenti:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
Lungh.	17mm.	15mm.	14mm.	15mm.	14mm.	13mm.	13mm.	10mm.
Largh.	17.	14.	13.	15.	14.	14.	12.	9.
Spess.	10.	9.	9.	8.	11.	11.	10.	4.

Rhynchonella ptinoides Di-Stef.

(*Tav. II, fig. 13, tav. III. fig, I.*)

Conchiglia generalmente più lunga che larga, talora un po' più larga che lunga oppure tanto larga che lunga, sub-pentagonale, fortemente compressa sui fianchi. Valva imperforata molto convessa, gibbosa sull'umbone, fornita di un lobo molto largo ed elevato, diviso dalle parti laterali della conchiglia da spazj poco profondi, ma larghissimi. Valva perforata molto più piccola dell'altra e depressa,

(1) Quenstedt, *Petrfaktenkunde Deutschlandss; die Brachiopoden*, pag. 39, tav. 37, fig. 2-6.

munita di un seno larghissimo e assai profondo, che si manifesta rapidamente al di sotto dell' apice e si prolunga e s' inflette alla fronte in un lembo linguiforme largo e lungo.

L'apice è piccolo, basso, molto curvato, compresso sulla valva imperforata, con i margini laterali arrotonditi e corti. Il forame è piccolo e formato sotto dai due pezzi del deltidio, che è piccolo e basso; la linea cardinale è fortemente arcuata.

L' unione delle valve si fa con angolo ottuso, e sui lati della linea cardinale nello stesso piano, per effetto dei due forti appiattimenti che vi sono. La commessura frontale è fortemente sinuata alla fronte e dentata ; quella laterale è sigmoidea nel campo degli appiattimenti, perchè ivi .mostra due inflessioni, in senso opposto, una breve verso la valva imperforata, ora forte, ora leggiera, e un'altra più larga, ma meno forte, verso quella perforata.

La superficie della conchiglia è fibrosa e ornata sopra ogni valva di 4-5 coste larghe, alte e angolose sopra, che divengono leggerissime sugli apici e talvolta quasi invisibili. Di esse se ne contano 2-3 sul lobo, 1-2 sul seno e 1 sopra ogni lato delle valve. Le strie di accrescimento sono assai forti verso la fronte.

Questa specie, che pei caratteri della sua forma potrebbe aggrupparsi con la *Rh. acuta* Sow. sp. del Lias, la *Rh. ringensi* Hér. la *Rh. cynoephala* la v. Buch sp. del Dogger, la *Rh. Loxiae* Fisch. del Malm. ecc., ha strettissime relazioni con la *Rh. lubrica* Uhl. (1) del Lias inferiore di Sospirolo ; però non mi pare che le si possa identificare, perchè la *Rh. lubrica* ha l'apice più prominente, fornito di acuti angoli laterali e pochissimo curvato, non è fortemente gibbosa sull' umbone della valva imperforata, ha un lobo basso ed è meno compressa sui lati.

La *Rh. Delmensis* Haas e la *Rh. Steinmanni* Haas (2) (due spe-

(1) Uhlig, *Ueber die liasische Brachiopodenfauna von Sospirolo bei Belluno*, pag. 39, tav. V, fig. 5-7.

(2) Haas und Petri, *Die Brachiopoden d. J-F. v. Elsass Loth.*, pag. 191, tav. IV, fig. 1-9.—pag. 197, tav. IV, fig. 15.

cie che con ragione il Deslongchamps (1) vorrebbe riunire in una) mostrano anche intima relazione con la *Rh. ptinoides;* la quale ne differisce per le più forti compressioni sui lati della conchiglia, per la forma meno dilatata, pei lobi laterali meno distinti, più corti, separati più in alto, per la mancanza di acuti angoli apiciali, pel piccolo forame e per le chiare arcuazioni della commessura sui lati della linea cardinale. Nondimeno i rapporti della *Rh. ptinoides* con la *Rh. Delmensis* rimangono così stretti, che potrebbe dirsi di esser la prima una modificazione mediterranea delle varietà paucicostate della seconda.

Questa specie è rara nella parte inferiore del Lias medio del M. San Giuliano e in quello di Castelluccio presso Taormina e delle Rocche rosse di Galati (Messina). Gli esemplari figurati provengono da quest'ultima località e sono i meglio conservati.

Le misure di alcuni esemplari sono le seguenti:

	I.	II.	III.	IV.
Lunghezza	24mm.	19mm.	19mm.	15mm.
Larghezza	18.	17.	18.	15.
Spessore	14.	12.	11.	13.

Rhynchonella Briseis Gemm.

(Tav. III, fig. 9-13)

1838. *Rhynchonella variabilis* v. Buch, Éssai d'une classification e d' une déscription des Térébratules (Mém. de la Soc. geol. de France, vol. III) pag. 141, tav. XIV, fig. 10.

1851. „ „ Davidson, A Monograph of british oolitic and liassic Brachiopoda (Palaeont. Society of London ecc.) p. 78, tav. XV, fig. 8-10 (escluse fig. 1-6 della tav. XVI).

(1) Deslongchamps, *Études critiques sur des brachiopodes nouveaux ou peu connus* pag. 316, tav. 16, fig. 9.

1858. *Terebratula variabilis*	Quenstedt, der Jura, pag. 151, tav. 17, fig, 27-29; tav. 22, fig. 10.
1858. „ *bidens*	Quenstedt non Phill., Ibid., pag. 179, tav. 22, fig. 7.
1864. *Rhynchonella variabilis*	Dumortier, Études paléontologiques sur les dép. jurass. du bass. du Rhône; Infralias, p. 165, tav. XXV, fig. 5-10.
1867. „ „	Dumortier, Ibid.; Lias inférieur, pag. 230, tav. XLIX, fig. 230.
1869. *Rhynchonella variabilis*	Dumortier, Ibid.; Lias moyen, p. 150 tav. XXII, fig. 13, 14.
1871. *Terebratula triplicata*	Quenstedt, Petrefaktenkunde Deutschlands; die Brachiopoden, pag. 71, tav. 37, fig. 176; tav. 38, fig. 10-12 (escluse il resto).
1871. „ *triplicata fronto*	Quenstedt, Ibid., pag. 71, tav. 37, fig. 177-182.
1871. „ *triplicata squamplix*	Quenstedt, Ibid., pag. 73, tav. 38, fig. 2, (7)?; (escluse fig. 3-6, 8, 9).
1874. *Rhynchonella Briseis*	Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con *T. Aspasia* nella provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 77, tav. XI, fig. 19-22.
1880. „ *Calderinii*	Parona, Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili (Atti della R. Acc. dei Lincei, a. CCLXXVII) pag. 21, tav. III, fig. 2.
1882. „ *triplicata*	Haas und Petri, die Brachiopoden der Juraformation von Elsass-Lothringen (Abhandl. z. geol. spez. Karte v. Els.—Lothr., II Bd.) p. 184, tav. 1, fig. 23, 26-28, 30, 31, (escluse fig. 22, 24); tav. III, fig. 37.

1884.	*Rhynchonella Briseis*	Haas, Beiträge zur Kenntniss der liasischen Brachiopodenfauna v. Süd-Tyrol und Venetien, pag. 1, tav. I, fig. 4, 7.
1884.	„ *Zitteli*	Haas, Ibid., pag. 6, tav. II, fig. 7.
1884.	„ *Briseis*	Parona, I brachiopodi liassici di Saltrio e Arzo nelle Prealpi Lombarde (Mem. del R. Istituto Lomb.) pag. 244, tav. II, fig. 10-20; tav. III, fig. 1, 2.
1886.	„ *variabilis*	Rothpletz, Geologisch-palaeontologische Monographie der Vilser Alpen (Palaeontographica, XXXIII Bd.), pag. 143.
1887.	„ *Delmensis*	Haas, Étude monographique et critique des brachiopodes rhétiens et jurassiques des Alpes vaudoises, II (Mém. de la Soc. pal. Suisse, v. XIV) pag. 79, tav. V, fig. 20, 21, (19)?
1887	„ *Briseis*	Haas, Ibid., pag. 77, tav. V, fig. 16, 18; tav. VI, fig. 1-11.
1889.	„ *variabilis*	Geyer, Ueber die liasischen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstatt (Abhandl. der k. k. geol. B. A., XV. Bd.) pag. 36, tav. IV, fig. 16, 22; tav. V, fig. 1-13.
1889.	*Rhynchonella Alberti*	Geyer (?) (non Oppel), Ibid. pag. 45, tav. V, fig. 14-17.
1889.	„ *Alberti*	var.? *lobata* Geyer (?), Ibid., pag. 45, tav. V, fig. 18.

Conchiglia in generale più larga che lunga, talvolta tanto larga che lunga o più lunga che larga, subpentagonale o subtriangolare, compressa sui lati, poco convessa, in molti casi asimmetrica per ineguale sviluppo delle parti laterali della conchiglia o per ispostamento del lobo e del seno. Valva perforata depressa, fornita di un seno

largo e profondo nella massima parte degl' individui , ma in parecchi casi leggiero , che incomincia debolissimo sotto la regione apiciale e si fa rapidamente profondo alla fronte. Valva imperforata in generale poco convessa, spesso depressa, e sempre assai meno di quella perforata, formata di un lobo largo, ora alto, ora un po' basso, separato dalle parti laterali della conchiglia da spazj larghi e a superficie obbliqua.

Apice basso , piccolo , appuntito , compresso sui lati e come strangolato, poco curvato, anzi quasi spinto indietro, con i margini laterali arrotonditi. Forame piccolo , formato sotto dai due pezzi del deltidio, che è piccolo e basso. Linea cardinale arcuata. Fronte per lo più sporgente , ma talvolta fortemente troncata e sopra alcuni esemplari appianata e ingrossata.

Superficie delle valve ornata sopra ognuna di 8-12 coste forti e angolose, delle quali se ne contano 2-5 sul lobo, 1-3 sul seno e 2-4 sui lati della conchiglia.

Sopra qualche individuo piccolo o di medio accrescimento le coste svaniscono prima di giungere all' apice. In pochi esemplari avviene di trovare delle rare coste biforcate sulla regione apiciale o un po' più sotto ed eccezionalmente triforcate.

La riunione delle valve si fa con angolo ottuso , e sui lati della linea cardinale degli esemplari grandi o di medie dimensioni sullo stesso piano , per effetto degli appiattimenti larghi e più o meno forti che vi sono. La linea cardinale tende ad arcuarsi molto leggermente verso la valva imperforata. La fronte e gli angoli di essa sono fortemente dentati.

La convessità della conchiglia è irregolare nelle forme grandi o di medio accrescimento fornite di lobo alto, perchè allora raggiunge il massimo sviluppo verso la fronte ; in quelle a lobo basso è più regolare. La *Rh. Briseis* siciliana è in generale poco convessa o depressa sotto l' apice ; solo varj individui del Lias medio delle Rocche rosse di Galati (Messina) sono più convessi di quelli della provincia di Palermo e di Trapani.

La presente descrizione è fondata solo sugli esemplari di Si-

cilia, fra i quali, specialmente al M. S. Giuliano e a Galati, ce ne sono molti che raggiungono grandi dimensioni. La specie è assai variabile per quanto riguarda il numero delle coste e i caratteri del lobo e del seno, che sono molto forti oppure leggieri. I grandi e i piccoli esemplari sono associati e così intimamente legati che riesce impossibile di separarli.

Il prof. H. Haas pel primo e più tardi il sig. G. Geyer hanno dimostrato che la *Rh. Briseis* Gemm. è identica con quel gruppo di *Rhynchonella* liassiche indicate comunemente coi nomi, di *Rh. variabilis* Schloth. sp. e *Rh. triplicata* Quenst. (p. p.). Il prof. G. Gemmellaro aveva di già notato sin dal 1874 gl'intimi rapporti della sua *Rh. Briseis* con gli esemplari liassici solitamente denominati dagli autori: *Rh. variabilis*. Or lo studio di tutti gl'individui illustrati dal Quenstedt, dal Davidson, dal prof. Haas e dal Geyer non può più far dubitare della necessità di riunire la *Rh. Briseis* con essi e con parte della *Rh. triplicata* Quenst. sp. non Phill.. Al gruppo così costituito il Sig. Geyer ha aggiunto anche la *Rh. belemnitica* Quenst. sp. del Lias inferiore e, a dir vero, con molte buone ragioni, fornitegli dal paragone degli esemplari di Hierlatz con vari scelti individui della *Rh. belemnitica* Quenst. sp. della Svevia. Ad Hierlatz si presentano infatti esemplari depressi e a lunghe coste, corrispondenti alla *Rh. belemnitica*, i quali non si possono dividere dalle altre *Rhynchonella* dello stesso giacimento comprese dal Geyer nel nome di *Rh. variabilis* Schloth.. Tuttavia il prof. Haas, come rilevo da sue comunicazioni letterali, persiste a credere che sia impossibile il riunire gl'individui estralpini della *Rh. belemnitica* con la *Rh. Briseis* Gemm., (*Rh. variabilis* Schloth.), perchè il loro esame mostra forti differenze. Io non credo che possa darsi oramai un valore differenziale al fatto che la *Rh. Briseis* Gemm. (*Rh. variabilis* Schloth.) e la *Rh. belemnitica* Quenst. sp. si trovano nell' Europa media in due orizzzonti separati, nè nel nostro caso farsi imporre dal dubbio che nel Lias di Hierlatz si potranno forse distinguere un giorno due piani, cioè il Lias inferiore e il medio. Sento invece la necessità che sia fatto un minuto paragone delle due specie per po-

ter risolvere la questione, perchè l'esame delle figure della *Rh. belemnitica* nei lavori del Quenstedt del prof. Haas fa credere che sia necessario di riunirle. La figura fondamentale della *Rh. belemnitica* (1) non differisce essenzialmente dalle varietà depresse e a coste ottuse della *Rh. Briseis (Rh. variabilis)* che si raccolgono nel bacino mediterraneo, e quelle dell' opera del Quenstedt " *Die Brachiopoden* „ (2) pel carattere delle coste acute, del seno, del lobo e della forma generale corrispondono in modo alla siciliana *Rh. Briseis* che io non saprei trovare un importante carattere differenziale. Il contrassegno distintivo tra la *Rh. belemnitica* e la *Rh. Briseis*, trovato negli acuti angoli apiciali della prima, non può invocarsi, perchè incostante e verificabile anche su esemplari della liassica *Rh. variabilis* Schloth. sp. e della *Rh. triplicata* Quenst. sp. (p. p.). Lo stesso prof. Haas ha di già dimostrato che non si può dare importanza generale al carattere degli angoli apiciali come contrassegno differenziale. *(Beiträge z. Kenntn. d. lias. Brachiopodenf. v. Südtyrol und Venetien,* pag. 4.).

La stessa corrispondenza con le forme poco convesse della *Rh. Briseis* di Sicilia mostrano le figure della *Rh. belemnitica* pubblicate dal prof. Haas (3). Tuttavia io sento di non poter dare un giudizio sicuro, avendo sinora potuto osservare solo due esemplari dell'Europa media determinati come *Rh. belemnitica* Quenst. sp.; ma spero che allo studio fattone dal Geyer si aggiunga anche quello di altri, che con un copioso materiale possa o provare la necessità dell' associazione delle due specie in discorso o fissare più nettamente ed estesamente i caratteri della *Rh. belemnitica* Quenst. sp.

La *Rh. Calderinii* Par. del Lias medio di Gozzano corrisponde così agli esemplari della *Rh. Briseis* (*Rh. variabilis*) di Hierlatz e del Lias medio di Galati (Messina) che non può tenersene separata. La

(1) Quenstendt, *Der Iura.* 1858.

(2) Quenstendt, *Petrefaktenkunde Deutschlands*, 1871.

(3) Haas und Petri, *Die Brachiopoden der Juraformation V. Elsass-Lothringen*, pag. 164, tav. 1, fig. 4-6. 9-10, 14.—Haas, *Étude monographique et critique des brachiopodes rhétiens et jurassiques des Alpes vaudoises*, pag. 29, tav. III, fig. 20, 31, 44, 55, 57.

Rh. Delmensis Haas è fondata sopra grandi esemplari della *Rh. Briseis*. Nel Lias medio del M. San Giuliano e di Galati i grandi e i piccoli esemplari della *Rh. Briseis* sono sempre associati e legati così intimamente pei loro caratteri, che è arbitrario il voler ritenere che il tipo della *Rh. Briseis* sia piccolo. Per questo non c' è nessuna ragione di staccare dalla *Rh. Briseis* lombarda, figurata dal prof. Parona, i grandi esemplari per collocarli nella *Rh. Delmensis*, come fa il prof. Haas (*Etude monogr. et crit. des brach. rhét. ecc.*, II, pag. 79).

Il Geyer riguarda (1) la *Rh. Alberti* Opp. come un membro estremo del gruppo della *Rh. Briseis*, e la tiene separata per i caratteri forniti dalla forte scoltura, dalla forte convessità dell' umbone della valva imperforata e dall' apice riverso indietro. Or è da notare che i grandi esemplari siciliani della *Rh. Briseis* differiscono tanto poco dagl' individui della *Rh. Alberti* figurati dal Geyer, che rigorosamente riesce difficile di separarli ; tuttavia tali individui di Sicilia corrispondono talmente agli esemplari piccoli e di medio accrescimento della *Rh. Briseis* che è impossibile staccarneli per collocarli nella *Rh. Alberti* Opp. che, secondo ce la figura Oppel, pel suo aspetto fortemente triangolare e ristretto sopra differisce bene dalla specie in esame. I caratteri distintivi della *Rh. Alberti* indicati dal Geyer nella forte scoltura e nell' apice riverso indietro si riscontrano negli esemplari siciliani della *Rh. Briseis* e sono insufficienti quindi a dividere da questa le *Rhynchonella* riferite dal Sig. Geyer alla *Rh. Alberti* Opp.. Rimarrebbe solo come contrassegno distintivo tra gli esemplari figurati dal Geyer e la siciliana *Rh. Briseis* la gibbosità dell'umbone della valva impeforata dei primi; ma se si vuol conservare al gruppo della *Rh. Briseis* (*Rh. variabilis*) l'estensione che i signori Haas e Geyer gli hanno dato, allora la *Rh. Alberti* figurata dal Geyer non può esserne divisa, perchè in quel gruppo sono state di già comprese forme molto convesse sotto l' apice.

(1) Geyer, *Op. cit.* pag. 43, tav. V, fig. 14-17.

Ho dato al gruppo in esame il nome di *Rh. Briseis* Gemm., perchè nelle presenti condizioni non è accettabile un'altra denominazione. La controversia che si è elevata tra il prof. Haas, il dott. Rothpletz e il sig. Geyer riguardo al nome da usare per tal gruppo persuade sempre più che è necessario di attenersi con rigore alle norme che solitamente reggono la nomenclatura delle specie e la compilazione della loro sinonimia. Per esse non è possibile di ritenere il nome di *Rh. variabilis* Schloth. sp., perchè, come è noto, non si sa precisamente quale specie abbia inteso indicare con questa denominazione lo Schlotheim. Egli fondò (1) la *Rh. variabilis* sopra esemplari del Lias, dello Zechstein e del Devoniano, e la descrizione e la figura che ne diede sono così indeterminate, che possono adattarsi a varie *Rhynchonella* liassiche non solo, ma anche, come recentemente notò bene il prof. Haas (2), alla *Camarophoria Schlotheimi* King, in modo che non si ha il diritto di ritenere il nome *Rh. variabilis* per le forme del Lias, dato che queste si avvicinino alla figura dello Schlotheim. Se lo Zieten e il Davidson fecero così, lo fecero arbitrariamente: del resto la figura della *Rh. variabilis* in Zieten (*Die Versteinerungen Würtembergs* ecc.) sembra assai più vicina alla *Rh. rimosa* v. Buch che al gruppo della *Rh. variabilis*, come è intesa dal dott. Haas e dal Geyer, e si sa dal catalogo della collezione di Schlotheim, pubblicato in Gota nel 1832, che gli esemplari del Lias di Amberg corrispondenti alla *Rh. variabilis* come fu figurata dal v. Buch, e perciò alla *Rh. Briseis* Gemm. e alla *Rh. triplicata* Quenst. non Phill. (p. p.) portavano in essa il nome di *Terebratulites bidentales* (vedi *Suess*, *Ueber die Brachiopoden d. Köss. Schichten.*, pag. 28). Il voler ritenere dunque il nome dello Schlotheim perchè antico e già ripetutamente usato, quand'anche inesattamente, nasce solo da ragioni sentimentali, che non bastano.

Rigettata così la denominazione dello Schlotheim, bisogna ac-

(1) Schlotheim, *Beiträge zur Naturgeschichte der Versteinerungen*, 1813 (Leonhard. mineral. Taschenbuch, VII Bd.) pag. 1, fig. 4.

(2) Haas, *Kritische Beiträge z. Kenntn. d. jurass. Brachiopodenfauna der Schweiz* ecc., I. (Abhandl. d. schweiz. pal Gesellschf., vol, XVI, 1889), pag. 3.

cettare fra i rimanenti sinonimi quello più antico, quando però non vi siano ragioni che vi si oppongano. Pertanto i nomi di *Rh. triplicata* Phill. e di *Rh. bidens* Phill. (1) non possono usarsi, perchè non è punto provata la loro identità con gli esemplari del gruppo che abbiamo studiato. Il Phillips non dà descrizione di queste specie e le figure che ne pubblicò possono, per la loro vaghezza, adattarsi a molte *Rhynchonella* del Lias; infatti il Quenstedt, che pur ne aveva applicato il nome a forme del gruppo della *Rh. Briseis (Rh. variabilis)*, finisce nel 1885 (2) col credere che le figure 22 e 24 della tav. 13 dell'opera di Phillips citata qua sotto possano rappresentare delle varietà della *Rh. furcillata* Theod. sp.. Non si può dunque asserire che la *Rh. triplicata* Phill. e la *Rh. triplicata* Quenst. siano identiche; piuttosto è da accettare l'opinione di Tate (3) e di Davidson (4) i quali sugli esemplari inglesi stabilirono che la *Rh. triplicata* Phill. e la *Rh. bidens* Phill. rappresentano la *Rh. lineata* Young et Bird (5).

Se si potesse provare del tutto l' identità della *Rh. belemnitica* Quenst. sp. e della piccola *Rh. obtusifrons* Suess (6) con le forme del gruppo in esame, sarebbe allora da accettare quest' ultimo nome come più antico; ma per quanto riguarda la prima ho di già esposto quali dubbj per ora impediscano la sua riunione alla *Rh. Briseis (Rh. variabilis)*, e per la seconda, vicinissima a questa e alla *Rh. belemnitica* Quenst. sp. , anzi, a quanto pare, identica con questa, non credo possa darsi un giudizio deffinitivo sulle figure di un piccolo esemplare. Per queste ragione siamo costretti ad uniformarci all' opinione ripetutamente espressa dal prof. Haas, e dare al gruppo in esame il nome di *Rh. Briseis* Gemm. (1874).

Or bisogna riconoscere che il gruppo della *Rh. Briseis*, così

---

(1) Phillips, *Illustrations of the Geology of Yorkshire*; pag. 57, tav. XLII, fig. 6.

(2) Quenstedt, *Handbuch der Petrefaktenkunde*, 1885, pag. 690.

(3) Tate and Blacke, *The Yorkshire Lias*, 1876, pag. 421.

(4) Davidson, *Supplement to the british. jurass. and triass. Brach.*, 1878, pag. 209.

(5) Young and Bird, *Geological Survey of the Yorkshire Coast*, 1828, pag. 232, tav. VIII, fig. 10.

(6) Suess, *Ueber die Brachiopoden der Kössener Schichten*, 1854, pag. 27 tav. IV, fig. 12.

come è stato composto dal prof. Haas e dal sig. Geyer, è troppo esteso e non omogeneo, perchè comprende individui assai differenti per la convessità della conchiglia, per la curvatura e forma dell'apice, pel numero e pei caratteri delle coste, e pel rapporto delle dimensioni, cioè per tutti i caratteri essenziali. Per questo è utile di eliminarne certe forme.

Così mi pare che la *Rh. triplicata squamplix* Quenst., inchiusa dal sig. Geyer nella sinonimia della *Rh. Briseis* (*Rh. variabilis*), ne differisca troppo per la finezza delle coste e la loro abbondante e regolare divisione. Inoltre si estenderebbe troppo il gruppo mantenendovi gli esemplari della tav. I, fig. 22, 29 *(Rh. triplicata),* della tav. I, fig. 24 e 30 e della tav. III, fig. 32, 34 e 36 (Forme intermedie tra la *Rh. triplicata* e la *Rh. curviceps)* dell' opera di Haas e Petri " *Die Brachiopoden d. J.-F. von Els.-Lothr.* „. I primi, cioè quelli della tav. I, fig. 22 e 29, nonostante che siano vicinissimi agli altri individui della *Rh. triplicata* figurati da Haas, hanno nondimeno l' apice troppo curvato o la forma troppo gonfia per potersi recisamente associare con la *Rh. Briseis* di Sicilia, e le seconde (tav. I, fig. 24 e tav. II, fig. 32, 34, 36), che lo stesso dott. Haas considera come forme intermedie tra la *Rh. triplicata* e la *Rh. curviceps,* ma che il sig. Geyer comprende recisamente nella sua *Rh. variabilis,* differiscono troppo dalla *Rh. Briseis* del bacino mediterraneo pel numero delle coste o per la forte curvatura dell'apice e per la gonfiezza della conchiglia sotto questo, in modo che è utile staccarnele.

L'esemplare della *Rh. triplicata* del Lias di Keilberg, rappresentato dal Quenstedt nella tav. 38, fig. 16 dei " *Brachiopoden* „ non può comprendersi nella *Rh. Briseis,* per la forma troppo slargata, pel lobo appianato sopra e ornato di molte coste.

Le varietà gonfie, multicostate e dilatate della *Rh. Briseis (Rh. variabilis)* figurate dal Geyer, come è specialmente quella della tav. V, fig. 2 del lavoro sui brachiopodi di Hierlatz, associate agli esemplari siciliani della *Rh. Briseis* formano forse un gruppo troppo esteso; sicchè, considerando che i loro rapporti con gli altri

individui di Hierlatz appartenenti al sovraddetto gruppo sono intimi, sarebbe bene indicarle come varietà, ma distinte da un nome. Esse sembrano intermedie tra la *Rh. Briseis* e la *Rh. Zitteli* Gemm.

Se pur si fanno nel gruppo della *Rh. Briseis* queste eliminazioni, tuttavia la specie rimane assai larga, perchè comprende individui depressi sotto l'apice, come sono quasi tutti i tipi siciliani, e altri molto convessi oppure gonfi, come sono gli esemplari già distinti dagli autori con i nomi di *Rh. triplicata* Quenst. sp. e di *Rh. variabilis* Schloth. sp.. Per questo non sarebbe inutile di distinguere nel gruppo chiaramente ed espressamente delle varietà *applanatae* e delle altre *inflatae*.

La *Rh. Briseis* Gemm. ha qualche relazione con la *Rh. Zitteli* Gemm. del Lias medio di Sicilia; però una riunione dei due tipi è impossibile. L' esemplare della *Rh. Zitteli* figurato dal Prof. Gemmellaro (1) non è sufficiente a far conoscere bene i caratteri della specie, che è stata da varj autori del tutto disconosciuta. Essa si distingue dalla *Rh. Briseis* per la forma assai più triangolare, più acuta avanti e così depressa come mai accade di osservare nè sulla *Rh. Briseis*, nè sulla *Rh. belemnitica*; per le depressioni laterali più forti e più estese; pel lobo larghissimo, bassissimo, poco distinto dalle parti laterali della conchiglia, fortemente appianato sopra e quadrangolare di aspetto; per le coste molto più fine e assai abbondanti sul lobo, che ne mostra ordinariamente 8, 9 e per eccezione 6, 7. Inoltre è da notare che la curvatura della conchiglia sul lobo si abbassa rapidamente alla linea frontale, come avviene nella *Rh. Fraasi* Opp. (2). Tutte le *Rhynchonella* riferite alla *Rh. Zitteli* da Haas e da Parona in varj lavori non corrispondono punto al tipo siciliano, del quale ho potuto studiare una grande quantità d' individui nel Museo geologico dell' Università di Palermo.

Il gruppo della *Rh. Briseis* Gemm. trova le sue dirette relazioni nel Trias superiore nella *Rh. concordiae* Bittn. e in un' al-

(1) Gemmellaro, *Sopra i fossili della zona a T. Aspasia Mgh.* ecc., 1874, pag. 78, tav. XI, fig. 23.

(2) Oppel, *Ueber die Brachiopoden des untern Lias*, pag. 543, tav. XII, fig. 3.

tra forma descritta dal Bittner col nome di *Rhynchonella* ex aff. *Rh. variabilis* Schloth. (1)

La *Rh. Briseis* è molto abbondante nel Lias medio di Sicilia, ove è rappresentata da piccoli e grandi esemplari (M. San Giuliano liv. inf.; Rocche rosse di Galati e promontorio di Castelluccio nella prov. di Messina; Chiusa-Sclafani e Montagnola di Elia nella prov. di Palermo). Si raccoglie anche nel Lias medio di Arzo e Saltrio, in quello dei dintorni di S. Cassiano, di Gozzano e della Svizzera; nel Lias medio e inferiore di varî luoghi della Germania nel medio dell' Inghilterra, nonchè nell' inferiore di Saltrio (Lombardia) e di Hierlatz.

Le dimensioni di alcuni esemplari del M. San Giuliano sono le seguenti:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VII.	IX	X.
Lungh.	23mm	22mm	20mm	19mm	18mm	18mm	17mm	15mm	13mm	12mm
Largh.	25	23	23	23	22	16	17	16	15	13
Spess.	15	14	13	12	13	12	10	9	16	7

Var. **Iphimedia.**

(Tav. III, fig. 14 - 17)

Insieme con gli esemplari della *Rh. Briseis* descritti, se ne raccolgono molti altri nel Lias medio del M. San Giuliano, che, nonostante gl' intimi rapporti con essa, mostrano dei caratteri pei quali credo di fondare una varietà, che altri potrebbe separar come specie. Tali esemplari non possono esser considerati come individui anormali della *Rh. Briseis*, perchè si presentano in grande quantità e con costanza di caratteri non solo al M. San Giuliano, ma anche nel Lias medio del piccolo promontorio di Castelluccio presso Taormina. Essi mostrano la fronte sempre ingrossata, troncata e

(1) Bittner, *Brachiopoden der alpinen Trias*, pag. 264, tav. XXVII, fig. 1-17.
(2) Bittner, *Ibid.* pag. 264, tav. XXVII, fig. 26.

appianata, e sono ornati di 10-18 coste strette, acute, non di raro biforcate o triforcate sulla regione apiciale o un po' più giù. In rarissimi individui si osserva sulla metà inferiore della conchiglia il carattere della *Rhynchonella* rimose, cioè la riunione di due coste in una. Il lobo della valva imperforata è forte, largo, separato da spazj discretamente larghi e sempre piano sopra, fornito di coste pochissimo divergenti, che spesso giungono fino al numero di sette e non sono mai meno di quattro. La valva imperforata è poco convessa in generale, ma talora discretamente e in certi casi molto, però essa è sempre appianata dal primo terzo della conchiglia sino alla fronte; la valva perforata è quasi sempre meno convessa, e raramente in modo eguale. Le coste del seno in quest' ultima s' incurvano rapidamente verso la fronte come nella *Rh. curviceps* Quenst. sp. La riunione delle valve avviene sullo stesso piano.

Il carattere della fronte troncata si riscontra in varj esemplari estramediterranei della *Rh. Briseis* e in taluni mediterranei; però l' insieme costante dei caratteri formato dalla fronte troncata e ingrossata, dalle coste molto fine, numerose, poco divergenti sul lobo e dal lobo piano sopra e perciò di forma quadrangolare, danno un tipo speciale agli esemplari in esame e differente in modo dalla *Rh. Briseis* Gemm., che permette di fondare una buona varietà. Non ho separato del tutto come specie, le forme descritte perchè le loro analogie con gl' individui dela *Rh. Briseis* a fronte appiattita sono intime e perchè il carattere della finezza delle coste è variabile, in modo che la varietà descritta passa per gradi intermedj alla vera *Rh. Briseis* con forti coste. L'associazione di esemplari come quelli della tav. III, fig. 9*a*, *b*, *c* e della tav. III, fig. 15*a*, *b*, *c* può sembrare a prima vista poco naturale; ma i passaggi fra di loro sono così intimi e abbondanti nel ricco materiale studiato, che io non mi sento del tutto facoltato a separarli nettamente come specie differenti.

Gli esemplari di questa varietà non depressi mostrano i rapporti che la *Rh. Briseis* ha con la *Rh. tetraedra* Sow. Sp.. Essi però ne sono ben distinti per le costanti minori dimensioni, per le

coste più fine ed acute, per lo più in numero minore e sempre poco divergenti sul lobo, per la fronte appianata, pel lobo quadrangolare e per la mancanza di acuti angoli apiciali. Ci è qualche raro esemplare della *Rh. Briseis*, molto convesso e con numerose coste, che anche si avvicina dippiù alla *Rh. tetraedra* Sow. sp.

Le analogie della var. *Iphimedia* sono molto più intime con la *Rh. Rosenbuschi* Haas (1), che appartiene al gruppo della *Rh. tetraedra* Sow. sp.; nondimeno le minori proporzioni della varietà siciliana, il suo lobo appianato sopra e perciò quadrangolare di aspetto, le sue coste più fine, la forma meno slargata e talora allungata, la fronte appianata e la commessura laterale diritta la mantengono distinta.

La var. *Iphimedia* con le sue forme poco depresse rammenta anche la *Rh. curviceps* Quenst. sp., però il carattere della fronte appianata e del lobo forte, ben distinto e appianato sopra, la differiscono bene.

Infine non sono da disconoscere i molti rapporti di questa varietà con la *Rh. Zittelli* Gemm.; tuttavia ho potuto persuadermi che è impossibile la loro riunione, perchè la *Rh. Zitelli* è sempre più depressa, fornita in generale sul lobo di un maggior numero di coste e ornata di un lobo bassissimo e non ben separato dalle parti laterali della conchiglia. Inoltre il suo apice è molto coartato e la fronte si abbassa così rapidamente da ricordare la *Rh. Fraasi* Opp.

Questa varietà è abbondante nella parte inferiore del Lias medio del M. S. Giuliano e rara nella superiore. Nel Lias medio di Castelluccio presso Taormina se ne raccoglie un discreto numero di esemplari.

Le dimensioni di alcuni individui del M. S. Giuliano sono le seguenti:

Lunghezza	20mm	19mm	18mm	17mm	16mm	14mm	14mm
Larghezza	22	22	19	18	18	14	13
Spessore	13	13	12	11	10	9	7

(1) Haas und Petri, *Die Brachiopoden der J.-F. v. Els.-Lothr.*, pag. 195, tav. IV, fig. 10, 14.

Rhynchonella Alberti Opp.

1861. *Rhynchonella Alberti* Oppel, Ueber die Brachiopoden des untern Lias (Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellschf., XIII Bd.) pag. 546, tav. XIII, fig. 4*a*, *b*, *c*.
1879. „ „ Uhlig, Ueber die liasischen Brachiopodenfauna von Sospirolo bei Belluno (Sitzb. d. Akd. der Wissenschf.) pag. 32, tav. IV, fig. 1-2.

Nella parte inferiore del Lias medio del M. San Giuliano si raccolgono pochi grossi esemplari di una *Rhynconella*, che corrispondono bene alle figure della *Rh. Alberti* pubblicate da Oppel, ma non a quelle date dal Geyer *(Ueber die liasischen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstatt,* tav. IV, fig. 14-17). Essi mostrano i seguenti caratteri:

Conchiglia più larga che lunga o tanto larga che lunga, ristretta sopra. Apice piccolo, poco curvato, anzi leggermente riverso indietro; forame assai piccolo, formato sotto dal deltidio, che è piccolo e basso. Valva perforata poco convessa, fornita di un seno largo e profondo, che comincia debole sotto la regione apiciale, e sul quale alla fronte si elevano a forma d'ali i lati della conchiglia. Valva imperforata assai più convessa, specialmente sotto l'apice, munita di un lobo largo ed elevato, largamente e rapidamente separato dalle parti laterali della conchiglia.

La superficie delle valve è ornata di 9-10 coste molto forti ed angolose sopra, delle quali 2-3 sono sul lobo e 3-4 sopra i lati delle valve. La commessura è diritta sui lati, sinuata e fortemente dentata alla fronte.

Ho già detto a proposito della precedente specie che la *Rh. Alberti* figurata dal Geyer è probabilmente la *Rh. Briseis* Gemm.; aggiungo qui che la *Rh. Alberti,* var.? *lobata* Geyer è certamente da riunire alla specie del prof. Gemmellaro.

La *Rh. Alberti* si raccoglie nel Lias inferiore di Hierlatz, di

Sospirolo e della Selva Baconica, nonchè nel Lias medio dell' Appennino centrale.

L' esemplare del Lias medio del Bacino del Rodano figurato dal Dumortier (1) non può, pel suo aspetto, riunirsi alla *Rh. Alberti* Opp.

Rhynchonella Zugmayeri Gemm.

(Tav. III, fig. 18; tav. IV, fig. 1, 2.)

1878. *Rhynchonella Zugmayeri* Gemmellaro, Sui fossili del calcare cristallino delle Montagne del Casale e di Bellampo nella provincia di Palermo (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 420, tav. XXI, fig. 50-60.

Conchiglia generalmente asimmetrica, divisa sulla regione frontale in due parti, delle quali una è abbassata e l' altra alta; discretamente convessa, nella maggior parte dei casi più lunga che larga, talora tanto larga che lunga o un po' più larga che lunga. Valva imperforata più convessa dell' altra raramente in egual misura, con la massima convessità sul terzo anteriore della conchiglia, fornita di un lobo leggiero, spesso bassissimo o scancellato, ora ben distinto dalle parti laterali della conchiglia, ora no. In varj casi il lobo è ben diviso solo da un lato, per effetto dello staccarsi delle due porzioni della conchiglia inegualmente alte. Sulla valva perforata ci suole essere un seno debole, che comincia leggerissimo al di sotto della regione apiciale o anche più in basso, ed è ora ben apparente sulla fronte, ora quasi scancellato.

L' apice è poco curvato, piccolo, appuntito e fornito sui lati di angoli acuti. Il forame è piccolo e formato sotto dai pezzi del deltidio, che è alto. La linea cardinale è molto arcuata.

(1) Dumortier, *Études pal. sur le bass. du Rhône; Lias moyen*, pag. 332, tav. XLII fig. 14, 15.

La superficie di ogni valva è ornata di 16-20 coste forti, angolose sopra, che sulle regioni apiciali o più sotto si dividono spesso in fascetti di due e non di raro di tre coste. Sul lobo si contano 4-6 coste, sui lati delle valve 5-7.

La linea commessurale è dentata sui lati e sulla fronte, dove è anche largamente, ma più o meno leggermente sinuata.

La conchiglia è variabile di forma per la frequente asimmetria, dovuta al dividersi sulla regione frontale in due parti d' ineguale altezza e alla mancanza o presenza del lobo e del seno, che quando si presentano, sono sempre spostati verso un lato o l' altro delle valve, producendo talora l' arcuazione laterale, delle coste.

Questa specie, che pel suo aspetto dev' essere considerata come la forma più antica del gruppo della *Rh. incostans* Sow., ha certo molti rapporti con la *Rh. fissicostata* Suess (1), ma nondimeno non vi si può associare, come pare che vorrebbe fare il Geyer (2), giudicando solo dalle figure pubblicate dal prof. Gemmellaro. La *Rh. Zugmayeri* non può neanco essere compresa nel gruppo della specie del Suess; essa ne è ben distinta pel numero minore di coste, che sono assai meno suddivise e mai così fine ed acute sulla regione apiciale come sono caratteristiche in quella, per la sua forma in generale più ovale ed allungata, per la mancanza di campi concavi sui lati della linea cardinale e per la spiccata asimmetria di forma della linea frontale, caratteri che la collocano in altro gruppo. Anche l' apice più piccolo, più basso e senza falsa area ben apparente dà un buon contrassegno distintivo.

Il fatto che la *Rh. Zugmyeri* ha le coste spesso biforcate non dà ragioni sufficienti per riunirla alla *Rh. fissicostata,* perchè è noto come questo carattere sia frequente sopra *Rynchonella* differentissime; del resto si notano tra la *Rh. fissicostata* e la *Rh. Zugmayeri* differenze maggiori che non tra la prima e la *Rh. latifrons* Stur (3), che pure ne è stata divisa dal Geyer.

(1) Suess, *Die Brahiopoden der Kössener-Schichten,* 1854, pag. 30, tav. IV, fig. 1-4.
(2) Geyer, *Op. cit.*, pag. 57.
(3) Geyer, *Op. cit.*, pag. 54, tav. VI. fig. 25-31.

Ci sono esemplari giovani che si avvicinano alla *Rh. plicatissima* Quenst. sp., dalla quale differiscono solo per l'asimmetria derivante dalla divisione della fronte in due parti d'ineguale altezza e per le coste più grosse, meno acute e più avvicinate fra di loro.

Questa specie si raccoglie nel calcare cristallino del Lias inferiore di Sicilia (sulla montagna di Bellampo presso Palermo) e abbondantemente nella parte superiore del Lias medio del M. San Giuliano. Essa presenta le seguenti misure.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
Lunghezza	22mm	21mm	21mm	20mm	19mm	19mm	17mm	13mm
Larghezza	23	21	17	18	17	16	15	12
Spessore	14	14	10	11	10	10	10	7

Gen. TEREBRATULA (Llhwyd) Klein.

Terebratula punctata Sow.

1818. *Terebratula punctata*	Sowerby, Mineral Conchology of Great-Britain, vol. I, pag. 46, tav. XV, fig. 4.
1851. „ „	Davidson, A Monograph of british oolitic and liassic Brachiopoda (Palaeont. Society of London) pag. 45, tav. IV, fig. 1, 6.
1851. „ *subpunctata*	Davidson, Ibid., pag. 46, tav. VI, fig. 7-10, 12, 16.
1851. „ *Edwardsi*	Davidson, Ibid., pag. 30, tav. VI, fig. 11-15.
1853. „ *subpunctata*	Chapuis et Dewalque, Déscription des foss. des terr. second. de la province du Luxembourg, p. 239, tav. XXXVI, fig. 1.

1855. *Terebratula Davidsoni* — Haime, Notice sur la géologie de l'île de Majorque (Bull. de la Soc. geol. de France, 2 S., vol. XII), pag. 745, tav. XV, fig. 6*a*, 6*d*; (6*c*, 6*b*)?

1858. „ *punctata* — Quenstedt, Der Jura, pag. 75 e 144, tav. 18, fig. 5.

1858. „ *ovatissima* — Quenstedt, Ibid., pag, 75, tav. 9, fig. 1-2; tav. 12, fig. 13.

1861. „ *sinemuriensis* — Oppel, Ueber die Brachiopoden des unteren Lias (Zeitschrf. d. deutsch. geol. Gesellschf.,) XIII Bd.

1861. „ *Andleri* — Oppel, Ibid., p. 536, tav. X. fig. 4.

1863-85 „ *punctata* — Deslonchamps, Paléontologie française; Brachiopodes, pag. 160, tav. 12, fig. 1-3; tav. 40, fig. 1-9; tav. 41, fig. 1, 2.

1863-85 „ *subpunctata* — Deslongchamps, Ibid., pag. 165, tav. 39, fig. 1-7; tav. 43, fig. 4.

1863-85 „ *Edwardsi* — Deslongchamps, Ibid., pag. 167, tav. 41, fig. 3-7; tav. 42 fig. 1, 10.

1863. „ *punctata* — Ooster, Synopsis des brachiopodes des Alpes suisses, pag. 8, tav. 1, fig. 13-16.

1867. „ *subpunctata* — Dumortier, Études paléontologiques sur les dèpôts jurassiques du bassin du Rhône; Lias inferieur, pag. 80, tav. XIII, fig. 7, 8.

1867. „ *basilica* — Dumortier, Ibid., pag. 78, tav. XIV, fig. 1, 2.

1867. „ *sinemuriensis* — Dumortier, Ibid., pag. 226, tav. XLIX, fig. 4.

1871. „ *punctata* — Quenstedt, Petrefaktenkunde Deutschlands; die Brachiopoden, p. 322 tav. 46, fig. 25, 27, 28, (26?)

1871.	*Terebratula ovatissima*	Quenstedt, Ibid., pag. 328, tav. 46, fig. 54, 55 (esclusa fig. 56).
1872.	„ *cfr. punctata*	Tietze, Geologische u. palaeontologische Mittheilungen aus d. südl. Theil des Banater Gebirgstokes (Jahrb. d. k. k. geol. R. A., XXII, Bd.) pag. 125, tav. VII, fig. 3.
1876.	„ *punctata*	Davidson, Supplement to the british jurass. and triass. Brachiopoda (Palaeont. Society of London) pag. 130, tav. XVI, fig. 3-5, 9-10 (var. *Havesfieldensis*); fig. 6, 7, 8, 11, 12; fig. 14-18 (var. *Radstockiensis*).
1875.	„ *perforata*	Neumayr, Zur Kenntniss der Fauna des untersten Lias in den Nordalpen (Abandl. d. k. k. geol. R. A., VII Bd.), pag. 11, tav. I, fig. 7 (esclusa fig. 8).
1880.	„ *punctata*	Haas u. Petri, Die Brachiopoden der Juraformation v. Elsass-Lothringen (Abhand. z. geol. spec. Karte v. Els.—Loth., II Bd.) pag. 247, tav. VIII, fig. 1-4, 7-11.
1884.	„ *punctata*	Parona, I brachiopodi liassici di Saltrio e Arzo nelle Prealpi lombarde (Mem. del R. Istituto lomb.) pag. 23, tav. III, fig. 16-25; tav. IV, fig. 1-14, 16-19 (esclusa fig. 15).
1886.	„ *punctata*	Haas, Étude monographique et critique des brachiopodes rhétiens et jurassiques des Alpes vaudoises, 1 (Mem. de la Soc. pal. suisse, vol. XI) pag. 47.

1886.	*Terebratula punctata*	Di-Stefano, Sul Lias inferiore di Taormina e de' suoi dintorni, p. 82 tav. III, fig. 21-30.
1886.	„ *Ceres*	Di-Stefano, Ibid., pag. 79, tav. III, fig. 16-19.
1886.	„ *Danae*	Di-Stefano, Ibid., pag. 77, tav. III, fig. 14-15.
1886.	„ *punctata*	Rothpletz, Geologisch-palaeontologische Monographie der Vilser Alpen (Palaeontographica, XXXIII Bd.) pag. 109.
1887.	„ *punctata*	Haas, Étude monographique et critique des brachiopodes rhétiens et jurassiques des Alpes vaudoises (Mem. de la Soc. pal. suisse) pag. 110.
1889.	„ *punctata*	Geyer, Ueber die liasischen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstatt (Abhadl. d. k. k. geol. R. A., XV Bd.) pag. 1, tav. I, fig. 1-16.
1890.	„ *punctata*	Tausch, Zur Kenntniss der Fauna der Grauen Kalke der Südalpen (Abhandl. d. k. k. geol. R. A., XV Bd.) pag. 3, tav. III fig. 2-6.

La *T. punctata* Sow. è assai abbondante nella parte superiore del Lias medio del M. San Giuliano, dove offre la solita grande variabilità di aspetto. La massima parte degl' individui sono coperti di finissime strie longitudinali e sono più o meno troncati alla fronte, sulla quale raramente hanno un seno come nella *T. punctata*, var. *Andleri* Opp.; molti altri sono largamente e leggermente arrotonditi al contorno, presentando la forma della *T. punctata* tipica, e non pochi sono stretti e molto allungati, come la *T. punctata* var. *ovatissima* Quenst. Il loro apice è discretamente curvato, ma non sempre così basso da nascondere il deltidio; però ha sem-

pre gli angoli laterali distinti e talora acuti. Il forame è discretamente grande. La convessità della conchiglia è variabilissima, giacchè si hanno forme depresse e altre molto convesse, senza che nessuna però lo sia tanto quanto la var. *subpunctata* Davids. Su molti esemplari l' angolo apiciale è largo, su altri tanto stretto che la conchiglia si mostra acuta sopra.

L' appiattimento sotto l'apice ora è ben visibile o assai forte, ora manca del tutto, sicchè si ha la conferma dell'opinione che il carattere della depressione sull' umbone della valva imperforata non ha importanza.

La linea commessurale si mantiene in generale sullo stesso piano; solo alla fronte è qualche volta lievemente arcuata verso la valva perforata.

Lo studio esteso di questa specie, mentre ha provato la grandissima variabilità della sua forma, ha dimostrato chiaramente che non è possibile dividere da essa come specie distinte la *T. subpunctata* Davids., la *T. sinemuriensis* Opp., la *T. Andleri* Opp., la *T. ovatissima* Quenst., la *T. Davidsoni* Haime (almeno in parte) e la *T. Edwardsi* Opp. ecc.; tuttavia si è dovuto riconoscere che alcune di esse sono atte a costituire buone varietà, come la *T. Andleri* Opp., la *T. ovatissima* Quenst. e, a me pare, anche la *T. subpunctata* Davids, grande, gonfia e allungata. La *T. basilica* Opp. è certamente legata in modo intimo con la *T. punctata* Sow., var. *Andleri* Opp.; però per le sue grandi dimensioni, per la forma molto pentagonale, per la forte convessità e la grande larghezza costituisce una di quelle forme estreme, che sarebbe meglio tener del tutto separate dalla *T. punctata*.

Credo probabile che la *T. Bittneri* Geyer (Op. cit, pag. 11, tav. 1, fig. 36; tav. 11, fig. 1.) sia fondata sopra una varietà della *T. punctata*, perchè questa specie presenta nel Lias di Sicilia l'apice così lungo come è in quella (vedi Di-Stefano, *Sul Lias inferiore di Taormina* ecc., tav. III, fig. 30 e 26). Forme identiche a quelle figurate dal Geyer col nome di *T. Bittneri* se ne osservano non poche nel Lias di Taormina, e io non ho saputo mai

dividerle dalla *T. punctata*. Alcune di esse presentano anche l'appiattamento sotto l'apice.

Tuttavia bisogna notare che la mia opinione è fondata sull'osservazione delle sole figure, mentre sarebbe necessario avere in mano gli esemplari originali per emettere un giudizio sicuro.

Nel mio lavoro " *Sul Lias inferiore di Taormina* ecc. ", pur conoscendo bene per diretta osservazione la grande variabilità della *T. punctata*, separai da questa alcune forme perchè offrivano certi caratteri differenziali; ora però lo studio più esteso della specie del Sowerby mi ha convinto che le mie *T. Danae* e *T. Ceres* debbono senz'altro riunirsi con essa. Anche la *T. Enna* Di-Stef. è da comprendere nel gruppo della *T. punctata*, se si vuol dare a questo l'estensione che gli è stata data nei recenti lavori tedeschi; però è da ponderar bene se convenga associare alla *T. punctata*, (il cui tipo è dal Sowerby disegnato con sufficiente chiarezza) quelle forme biplicate come p. es. la *T. Enna* e gli esemplari figurati dal Deslongchamps (*Paleont. franc.; terr. juras*, tav. XII, fig. 3) e dal Tausch (*Zur Kenntn. d. " Grauen Kalke "*, tav. II, fig. 3), che mostrano tutte anche una più o meno chiara arcuazione della commessura laterale. Questi caratteri, rispetto alle forme tipiche della *T. punctata*, sono importanti contrassegni differenziali, e perciò sarebbe utile di dare ad essi l'importanza che meritano, se non si vuole smarrire ogni criterio distintivo.

Per quanto riguarda le *T. Proserpina* Di-Stef., *T. Timaei* Di-Stef. e *T. Baldaccii* Di-Stef., che il Geyer (1) riguarda al massimo come varietà della *T. punctata*, osservo quanto segue: La *T. Proserpina* è certamente assai vicina alla *T. punctata* Sow. var. *subpunctata* Deslongc., però la forma molto gonfia della specie di Taormina, l'aspetto gibboso delle sue due valve, le forti compressioni laterali, l'elevatissima regione apiciale, lo stretto angolo apiciale e la presenza di un lobo alla fronte mi pare che non permettano l'identificazione di questa specie nè col tipo, nè con le varietà della

(1) Geyer, *Op. cit.*, pag. 6.

T. punctata, se non si vogliono estendere infinitamente i limiti di questa. La *T. Timaei* ha un distintissimo aspetto piriforme e una forte gonfiezza, e sembra del tutto arbitrario di volerla comprendere nel gruppo della *T. punctata,* che nè sugli esemplari del bacino anglo-parigino, nè su quelli mediterranei mostra quei caratteri così spiccati. La *T. Baldaccii* è con ogni probabilità la *T. juvavica* Geyer (1); essa ha l'apice appuntito all'estremità e angoloso sui lati, nonchè le tracce di un setto, i quali caratteri non sono a dir vero ben visibili nel disegno che io ne pubblicai. Io rimasi in dubbio, quando la descrissi, sulla sua riferenza generica, appunto perchè non ero sicuro dell'esistenza di un vero setto sulla valva imperforata, chè altrimenti l'avrei determinata come *Waldheimia*: a ogni modo essa differisce dalla *T. punctata* quanto la *T. juvavica*, con la quale si dovrebbe associare.

Il dott. A. Bittner (2) ha descritto recentemente una *T. preapunctata* del Lias inferiore (Dachsteinkalk), la quale è così vicina alla *T. punctata,* che difficilmente potrà separarsi, se non saranno chiarite delle differenze nell'apparecchio interno.

L'apparecchio brachiale della *T. punctata* è stato ben figurato dal Deslongchamps (3), che ha mostrato che esso per certi rapporti rammenta quello dei sottogeneri *Macandrevia* e *Dictyothyris,* e che potrebbe servire per fondare un nuovo sottogenere. Il dott. Rothpletz (4) ammette che la *T. punctata* abbia un setto e differisce lo apparecchio interno di questa specie da quello dei *Dielasma* solo per l'assenza di lamine rostrali sulla valva perforata. Il dott. Geyer ha fatto rilevare recentemente che sulla valva imperforata della *T. punctata* non si osserva un vero setto, sibbene una sottile stria suddivisa all'estremità in altre due, e che certamente è prodotta

---

(1) Geyer, *Ibid.*, pag. 6, tav. I, fig. 17-23.

(2) Bittner, *Brachiopoden der alpinen Trias*, (Abhandl. d. k. k. geo. R.-A. XIV Bd. 1890) pag. 257, tav. XXVIII, fig 2-5.

(3) Deslongchamps, *Paléontologie franç; Brachiopodes*, tav. 40 e tav. 109—*Études sur des brachiopodes nouveaux ou peu connus*, pag. 308, tav. X, fig. 12.

(4) Rothpletz, *Op. cit.*, pag. 110.

dalle impressioni muscolari. Tale stria si osserva infatti sugli esemplari siciliani, accompagnata per lo più da altre divergenti, e non ha punto l'aspetto di setto: tutte sembrano prodotte dalle impressioni muscolari e dai vasi venosi.

La *T. punctata* è assai abbondante in Sicilia nella parte elevatissima del Lias inferiore di Taormina, nella parte superiore del Lias medio del M. San Giuliano, in quello della contrada Taja-di-sopra presso Caltabellotta (Girgenti) e in quello del piccolo promontorio di Castelluccio (Taormina). Altrove si raccoglie nel Lias inferiore di Hierlatz, delle Alpi bavaresi, delle Alpi austriache (Breitenberg), del Portogallo (Strati a *Gryphaea obliqua*) e di Saltrio in Lombardia. Nel Lias medio è estesamente sparsa in Inghilterra, in Francia, in Germania, nelle Alpi valdesi, nelle Prealpi lombarde, nelle Alpi di Vils, nel Portogallo e nella Spagna. Pare che passi anche nel Lias superiore, e il Rothpletz crede di averne trovata una varietà nel Dogger (*Rothpletz*, Op. cit., pag. 110, tav. IV, fig. 7.).

Terebratula sphenoidalis Mgh. apud Gemmellaro.

1874. *Terebratula sphenoidalis* Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con *Ter. Aspasia* della provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia), pag. 62, tav. X, fig. 16-19.

Questa specie è rappresentata da pochissimi esemplari nella parte superiore del Lias medio del M. San Giuliano; essi sono però ben determinabili.

Il prof. Gemmellaro nel 1874 mandò per esame al prof. Meneghini alcuni individui di questa specie, e ne ebbe risposta che altri esemplari se ne trovavano nelle collezioni del Museo geologico dell'Università di Pisa sotto il nome ancora inedito di *T. sphenoidalis* Mgh.—Per questo il prof. Gemmellaro adottò la denomina-

zione del Meneghini. Or la pubblicazione dei tipi dell' Appennino centrale conservati nell' Università pisana (Canavari, *I brachiopodi degli strati a T. Aspasia* Mgh. *nell' Appennino centrale*, 1880, pag. 14, tav. II, fig. 5, 6) ha dimostrato che la *T. sphenoidalis* illustrata dal prof. Gemmellaro è differente dagl' individui dell'Appenino ai quali il prof. Meneghini aveva di già apposto lo stesso nome e che aveva giudicati identici a quelli siciliani. Le figure date dal Canavari nel lavoro citato sopra mi pare che mostrino chiaramente che la *T. sphenoidalis* di Monticelli presso Roma sia da riunire alla *T. punctata* Sow., dalla quale difficilmente si potrebbe separare; invece quella siciliana ne differisce bene per la presenza delle pieghe frontali. È necessario perciò di ritenere il nome di *T. sphenoidalis* Mgh. apud Gemm. per gli esemplari illustrati dal prof. Gemmellaro, perchè furono i primi ad esser pubblicati con tal nome (1874), e di porre gl' individui figurati dal prof. Canavari (*I brachiopodi degli strati a T. Aspasia* ecc.) nella sinonimia della *T. punctata* Sow.

Contrariamente all' opinione del dott. Geyer (1) e del dott. Tausch (2), io credo che la *T. sphenoidalis* Mgh. apud Gemm. debba tenersi separata dalla *T. punctata* Sow., perchè mostra sempre negl' individui adulti delle forti pieghe frontali dirette in senso inverso a quello delle pieghe di quest' ultima. Infatti mentre nella *T. sphenoidalis* esse hanno le convessità dirette verso la valva perforata, sulla cui regione frontale si rilevano, nella *T. punctata* le mostrano dirette verso quella imperforata. Tale differenza mi pare che sia sufficiente per tener divisi gli esemplari adulti delle due specie. È da riconoscere però che esse sono vicinissime e che spesso riesce difficile o impossibile di separare i giovani individui della *T. punctata* da quelli della *T. sphenoidalis* Mgh. apud Gemm.

La *T.* sp. ind. cfr. *T. sphenoidalis* Mgh. pubblicata dal prof. Canavari (3) mostra le tracce di una biplicazione simile a quella

(1) Geyer, *Op. cit.*, pag. 1.

(2) Tausch, *Op. cit.*, pag. 9.

(3) Canavari, *Contribuzione III alla conoscenza dei brachiopodi degli strati a T. Aspasia nell'Appennino centrale*, pag. 19, tav. X, fig. 2.

della *T. sphenoidalis* Mgh. apud Gemm., e perciò mi pare che si possa riunire con questa.

La specie in esame si raccoglie, rappresentata da un discreto numero di esemplari, nel Lias medio delle Rocche rosse presso Galati (Messina), del piccolo promontorio di Castelluccio (Taormina), della montagna della Ficuzza (Palermo), di Sant' Anna presso Giuliana (Palermo) e di Chiusa-Sclafani (Palermo).

Terebratula Rotzoana Schaur.

1865.	*Terebratula*	*Rotzoana*	Schauroth, Verzeichniss der Versteinerungen im herzogl. Naturaliencabinet in Coburg, pag. 125, tav. II, fig. 6.
1866.	„	„	Benecke, Ueber Trias und Jura in den Südalpen (Geognostisch-palaeontologische Beiträge, I. Bd.) pag. 167, tav. III, fig. 6.
1869.	„	„	Zittel, Beobachtungen aus den Central-Apenninen (Geognostisch-palaeontologische Beiträge, II. Bd.) pag. 137, tav. 15, fig. 4.
1879.	„	„	Meneghini, Monographie des fossiles du calcaire rouge ammonitique de Lombardie et de l'Apennin centrale, 1867-81 (Paléontologie lombarde), pag. 170.
1880.	„	*fimbrioides*	Canavari (p. p.), I brachiopodi degli strati a *T. Aspasia* nell' Appennino centrale (R. Acc. dei Lincei, a. CCLXXVII) pag. 13, tav. II, fig. 2 (esclusa fig. 1.)
1880.	„	*Rotzoana*	Canavari, Ibid, pag. 16, tav. II, fig. 3, 4.
1890.	„	„	Tausch, Zur Kenntniss der Fauna der “ Grauen Kalke „ der Süd-Alpen (Abhandl. d. k. k. geol. R. A., XV Bd.) pag. 5, tav. II, fig. 7, 8, 10.

Nella parte superiore del Lias medio del M. San Giuliano si raccolgono pochi e piccoli esemplari di una *Terebratula* liscia, i quali corrispondono così bene con le figure della *Ter. Rotzoana* Schaur., pubblicate dallo Schauroth, dal Benecke e dal Tausch, da non lasciare alcun dubbio sul loro riferimento specifico. La loro massima larghezza è al di sopra della fronte; l'apice è forte, molto curvato, elevato, fornito di margini laterali arrotonditi, ma visibili e lunghi. Le valve sono molto convesse, e quella perforata si mostra più curvata dell'altra. Il deltidio è largo; la linea cardinale arcuata. La loro commessura rimane sempre sullo stesso piano. Le strie di accrescimento sono molto forti verso la fronte.

Var. **plicata, Tausch.**

(Tav. IV, fig. 3-5)

Accanto agl' individui lisci della *Terebratula Rotzoana* se ne notano parecchi altri, che corrispondono con essa in tutti i caratteri essenziali, e solo ne sono distinti dalla presenza di 10-14 coste irregolari, superficiali, arrotondite, in qualche raro caso dicotome, che svaniscono generalmente prima di giungere sulle regioni apiciali, che però talora pervengono a toccare. Essi confrontano assai bene con le varietà costate della *T. Rotzoana* figurate dal dott. L. Tausch nel suo lavoro " *Zur Kenntniss der Fauna der Grauen Kalke* ecc. „. delle quali sono certo giovani esemplari, ed io non saprei trovar valevoli caratteri per dividerli. Tali individui segnano i passaggi della *T. Rotzoana* liscia alla *T. Renieri* Cat. (1), come fu ben notato dal Tausch, e si differiscono dalla specie del Catullo solo per la finezza delle coste. Se a questo carattere non vorrà darsi molta importanza, allora bisognerà riguardare la *T. Rotzoana* liscia come una varietà della *T. Renieri*, tanto intimi sono i rapporti tra le forme lisce della *T. Rotzoana* e le varietà costate fi-

(1) Catullo, *Saggio di zoologia fossile* ecc. 1827, pag. 167, tav. X, fig. *i, l.*

gurate dal dott. Tausch e da me. Del resto le forme liscie della *T. Rotzoana* corrispondono nell' aspetto generale e nell' apparecchio brachiale con la *T. Renieri*.

Certamente gli esemplari del M. San Giuliano sono vicinissimi alla *T. mediterranea* Can. (1) e in ispecie ai piccoli individui rappresentati dal Tausch (*Op. cit.*, pag. 8, tav. III, fig. 4, 5); però non mostrano il seno frontale che è caratteristico in quella, ed io perciò non saprei aggregarveli (2). Il contorno frontale degl' individui in esame è talora asimmetrico e ondulato, non solo per le leggiere dentature delle coste, ma per l' ineguale sviluppo di queste, delle quali talune, e sono le più estese, s' imprimono fortemente (tav. IV, fig. 3*c*, 4*b*.); però mai si produce un seno frontale. L' esemplare della tav. IV, fig. 3*b*, che fa osservare erroneamente come un rudimento di seno, è inesattamente disegnato, perchè esso ha la fronte solo ondulosa per effetto delle coste un po' irregolari.

Altre specie molto vicine agli esemplari del M. San Giuliano sono la *T. Eustachiana* Can. (3) del Lias inferiore dell' Appennino centrale (Canavari) e la *T. fimbrioides* Deslongc. (4). La *T. Eustachiana* se ne differisce per la conformazione dell'apice, che somiglia a quello delle *Waldheimia*, per la presenza di un seno frontale e per la forte gibbosità della valva imperforata. Questa specie è però estremamente vicina alla *T. mediterranea* Can., e solo il diretto paragone di esemplari completi delle due specie, potrebbe meglio e deffinitivamente farne rilevare le relazioni o i rapporti. L'una e l' altra sono poi in relazioni strette con la *T. fimbrioides* Deslongc., che ne differisce solo perchè meno globulare.

---

(1) Canavari, *Alcuni nuovi brachiopodi degli strati a T Aspasia nell'Appennino centrale*, pag. 6, tav IX, fig. 10 (*T. fimbrioides*) — *Contribuzione III alla conoscenza dei brachiopodi degli strati a T. Aspasia nell'Appennino centrale*, pag. 85 (*T. mediterranea*).

(2) Nella parte superiore del Lias medio del M. San Giuliano ho raccolto un solo grosso esemplare di una *Terebratula* costata e con seno frontale, la quale sembra identica con la *T. mediterranea* Can.; però pel suo cattivissimo stato di conservazione non può qui venire esaminata.

(3) Canavari, *Sui fossili del Lias inferiore nell'Appennino centrale*, 1879 (Atti della Soc. tosc. di Sc Nat. vol. IV) pag. 16, tav. XI, fig. 9.

(4) Deslongchamps, *Mem. de la Soc. Linn. de Normandie*, 10 vol., 1855; pag. 303, tav. XVII, fig. 2-9 — *Paléontologie franç.; terr. jurass.; Brachiopodes*, pag. 171, tav. 44, fig. 1-3.

La *T. fimbrioides* Deslongc. ha intimi rapporti con questi esemplari di Trapani da me ritenuti come varietà della *T. Rotzoana*; ma questi ne differiscono per l'apice più fortemente curvato, per la sua forma più gonfia, anzi globulare, per la costante mancanza di seno frontale e per le coste più deboli. Anche la *T. Fötterlei* Böckh (1) è vicina alla varietà descritta; però il forte sviluppo e la forte curvatura dell'apice della *T. Rotzoana* var. *plicata*, nonchè la maggiore convessità di questa ne stabiliscono bene le differenze.

La *T. tauromenitana* Di-Stef. (2) si distingue dalla descritta varietà essenzialmente pel lungo lembo e pel seno della valva perforata, pel lobo di quella imperforata e per le arcuazioni della commessura ai lati della linea frontale.

La *T. Rotzoana* Schaur. var. *plicata* del M. San Giuliano ha, per quanto riguarda almeno i caratteri della forma, intima relazione con la *T. pacheia* Uhl. (3) del Lias inferiore di Sospirolo, dalla quale si distingue per la sua minore convessità, per la valva imperforata leggermente depressa sopra, per le coste più leggiere, di numero minore e meno estese.

La *T. pacheia* Uhl., la *T. Eustachiana* Can., la *T. mediterranea* Can., la *T. tauromenitana* Di-Stef., la *T. fimbrioides* Deslongc., la *T. hyphoptycha* Can. (4), la *T. Rotzoana* Schaur., var. *plicata*, la *T. Renieri* Cat. e la lontana *T. fimbria* Sow. formano un gruppo di specie vicine per l' aspetto, che hanno un rappresentante nel Trias con la *T. suborbicularis* Münst. non d' Arch. e si rilegano così con le *Hemiptychina* del Paleozoico (5). La *T. Rotzoana* Schaur., var. *plicata* del M. San Giuliano rilega, per la forma, la *T. Rotzoana* e la *T. Renieri* alla *T. mediterranea* Can. e perciò alla *T. fim-*

---

(1) Böckh, *Die geol. Verhältn. des südl. Theiles des Bakony*, II; pag. 140, tav, III, fig. 3.

(2) Di-Stefano, *Sul Lias inferiore di Taormina e de' suoi dintorni*, pag. 75, tav. IV, fig. 2-4.

(3) Uhlig, *Ueber die liasische Brachiopodenfauna von Sospirolo bei Belluno* pag. 20. tav. II, fig. 1, 2.

(4) Canavari, *Contribuzione III alla conoscenza dei brachiopodi degli strati a T. Aspasia* ecc. pag. 84 (17), tav. X, fig. 1a.

(5) Waagen, *Salt-Rang fossils; Productus Limestone fossils (Brachiopoda)*, 1882 (Mem. of the Geological Surwey of. India) pag. 335, pag. 361.

brioides Deslongc. Questa specie e la *T. mediterranea* Can., la T. *hypoptycha* Can., la *T. Eustachiana* Can. e la *T. tauromenitana* Di-Stef. sono estremamente vicine, e spesso divise da differenze leggiere. La *T. hypoptycha* Can. del resto io la ritengo senza dubbi identica con la *T. fimbrioides,* così come il Deslongchamps la intende. Sui rapporti della *T. mediterranea* con la *T. Eustachiana* ho discorso un po' più su.

Perchè si possa costituire però un gruppo naturale con le specie nominate bisognerebbe conoscere bene l' apparecchio interno di tutte, poichè esso assimila spesso forme che parrebbero differenti e ne allontana altre molto somiglianti fra di loro. L' apparecchio della *T. Rotzoana* e della *T. Renieri* invece può dirsi discretamente conosciuto con i lavori dello Schauroth e del Tausch. La *T. Rotzoana* mostra sulla valva imperforata una leggiera e lunga lamina, molto leggiera per potersi dir vero setto, e due altre parallele più sottili che l' accompagnano; mentre sull'apice della valva perforata fa scorgere due forti lamine. L'apparecchio brachiale è corto e semplice, come quello della *Terebratula.* Nella *T. Renieri* si riscontrano, come notano Schauroth (Op. cit., pag. 125) e Tausch (Op. cit., pag. 6) i medesimi caratteri. Non è possibile dunque porre in due generi differenti, come fece il Waagen (1), la *T. Rotzoana* e la *T. Renieri.* Esse pei caratteri interni descritti non possono associarsi ai *Coenothyris,* nè alle *Waldheimia,* secondo dubitò lo Zittel (2): i caratteri del loro apparecchio non permettono di dividerle dalle *Terebratula.* Il Waagen prima e il Deslongchamps poi (3) compresero la *T. Renieri* Cat. (= *T. fimbriaeformis* Schaur.) fra le *Hemyptichina;* ma a questa divisione può darsi al massimo il valore di una sezione, anzichè di un genere, come del resto fanno lo stesso Deslongchamps e l' Oehlert (4).

La *T. Rotzoana* liscia e costata si raccoglie solo nel calcare bianco con crinoidi della parte superiore del Lias medio del

(1) Waagen, *Op. cit.* pag. 362.
(2) Zittel, *Handbuch der Palaeontologie,* 1, 1876-80, pag. 702.
(3) Deslongchamps, *Études critiques sur des brachiopodes nouveaux ou peu connus,* pag. 164.
(4) Oehlert in Fischer, *Manuel de conchyliologie,* ecc., 1877.

M. San Giuliano, generalmente con poca frequenza. Questa specie si presenta altrove, come la *T. Renieri*, nelle parti elevate del Lias medio dell' Appennino centrale, e più comunemente nel Lias superiore dell' Appennino centrale, delle Alpi lombarde, del Tirolo meridionale e delle Alpi veneziane. Taluni livelli delle Alpi che la contengono e sono riferiti al Lias superiore, potrebbero invece rappresentare le parti elevate del Lias medio.

Le dimensioni di alcuni esemplari plicati del M. San Giuliano sono le seguenti:

Lunghezza	16^{mm}	15^{mm}	15^{mm}	8^{mm}
Larghezza	13	13	12	7
Spessore	11	11	10	5

Gen. Waldheimia (King non Brullè) Davidson.

Come è noto, dopo che Hall ha proposto (*Index of the names which have been applied to the subdivisions of the class. brachiopoda;* Washington, 1877) di abbandonare nella classificazione dei brachiopodi il nome *Waldheimia* King (1849), perchè usato nel 1846 da Brullè per un genere americano d'imenotteri, è stato indicato per tal gruppo di brachiopodi quello di *Magellania,* Bayle (1880). A rigore dovrebbe accettarsi questa sostituzione di nome; però è oramai assai difficile di poter rimuovere dalla Paleontologia il nome *Waldheimia,* e dall' altro canto nel doppio uso della denominazione non è possibile la confusione dei due gruppi, trattandosi di brachiopodi fossili e d' un imenottero vivente d' America. Per questo si può, ma in via eccezionale, seguire l'opinione del Deslongchamps (1) e del Rothpletz (2), che propongono di mantenere ancora il nome *Waldheimia* pei brachiopodi.

Da varj autori è stato mostrato che la divisione fra *Terebratulidae* e *Waldheimidae* non è netta, e che perciò è difficile

---

(1) Deslongchamps, *Études critiques sur des brachiopodes nouveaux ou peu connus;* 1862-84.

(2) Rothpletz, *Op. cit.*

il poter ritenere tutti i gruppi sottogenerici fatti in queste famiglie dal Douvillè (1) e dal Deslongcamps. Sta il fatto che in talune *Terebratula* (*T. elongata* Schloth., *T. hastata* Sow., *T. sacculus* Mart., *T. gregaria* Suess. ecc.) si notano delle lamine rostrali, e che il setto si presenta talora nella *T. vitrea* Born., si osserva in varie *Biplicatae* e anche sparisce per assorbimento in certi stadî di età nella *Wald. cranium* Müll. (Frile). Dippiù l' apice delle *Waldheimia* giurassiche, appuntito e acutamente angoloso ai lati, si riscontra in vere *Terebratula* (*T. juvavica* Geyer), e invece il setto e il lungo apparecchio brachiale delle *Waldheimia* si rilevano su brachiopodi con apice di *Terebratula* (*T. Gerda* Opp., *fide* Geyer). La lunghezza dell' apparecchio brachiale non potrebbe perciò invocarsi neanco come importante carattere differenziale tra le *Terebratula* e le *Waldheimia*, tanto più che esso si presenta pure lungo in varie altre *Terebratula* (*Dielasma, Dichtyothyris*), oltre a quella citata avanti. Però se nessuno dei contrassegni delle *Waldheimia*, separatamente preso, ha costanza generica, l'insieme di essi (lungo apparecchio brachiale, setto, lamine rostrali ecc.) permette di distinguere un importante gruppo di brachiopodi, la divisione del quale sarebbe un errore di abbandonare. Che i generi non siano assai nettamente divisi, come non lo sono le famiglie ecc., è un fatto certo in natura; tuttavia noi dobbiamo sforzarci di scoprire i rapporti fra gli esseri e di aggrupparli sempre secondo questi, pur conoscendo che tutti i gruppi necessariamente si confondono nei termini estremi.

Per quanto riguarda i varj sottogeneri delle *Waldheimia* riesce al certo difficile il poterli mantenere, perchè la loro distinzione riposa quasi sempre sopra differenze di forma che passano lentamente le une alle altre; nondimeno, quando essi hanno una sufficiente importanza, è bene mantenerli almeno come sezioni, perchè servono a bene ordinare il materiale paleontologico e a far rilevare

(1) Douvillè, *Note sur quelques genres de brachiopodes*, 1879 (Bull. de la Soc. géol. de France, Tav. VII, S. III.).

a prima vista le relazioni e le differenze dei resti organici che studiamo. Per questo ho conservato in modo subordinato talune divisioni, sebbene possano sembrare artificiali (come sono del resto la massima parte delle nostre categorie di ogni ordine), e nonostante che si resti talora in dubbio sul collocamento sottogenerico di talune forme.

SEZ. ZEILLERIA.

Waldheimia securiformis Gemm., *var.* pomatoides Di-Stef.

(Tav. IV, fig. 6, 7.)

1874. *Waldheimia securiformis* Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con *T. Aspasia* della provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 66, tav. X, fig. 10, 11.

1884. „ *oxygonia* Haas, Beiträge zur Kenntniss der liasischen Brachiopodenfauna von Süd-Tyrol und Venetien, pag. 24, tav. IV, fig. 6.

Negli strati bassi ed elevati del Lias medio del M. San Giuliano si raccolgono abbondanti esemplari di una *Waldheimia* in intima relazione con la *Wald. securiformis* Gemm., ma dalla quale si discosta per talune differenze costanti, che permettono di poter formare una varietà, che io chiamo “*pomatoïdes.*„ Essi hanno della specie del prof. Gemmellaro i caratteri generali e la robustezza dell'apice; sono però più allungati, più fortemente triangolari e hanno i campi laterali (che si mostrano lunghi fino agli angoli frontali) larghi, forti e leggermente concavi o piani, formati quasi intieramente a spese della valva perforata. La loro commessura laterale è arcuata verso la imperforata e così vicina agli angoli laterali di questa che quasi vi si confonde. La fronte porta generalmente una

depressione per ogni valva. Queste depressioni sono larghe, ma leggiere, nondimeno fanno spesso arcuare in dentro il margine frontale, sicchè la conchiglia sembra allora bilobata, senza che si produca un vero seno. La più forte depressione è sempre sulla valva perforata, così che, mentre non di raro sparisce del tutto quella della valva imperforata, l'altra permane con vario grado di intensità. Sono rari gl'individui privi di depressioni frontali. L'orlo della fronte è talora retto, tal'altra lievissimamente arcuato in fuori, ma per lo più è come coartato nel mezzo.

L'apice è, come fu detto, robustissimo, appuntito all'estremità molto curvato, spesso compresso sull'umbone della valva perforata, e sempre carenato sui lati. È da notare che gli esemplari figurati possono riguardarsi come forme estreme riguardo alla spessezza dell'apice, il quale è solitamente assai più grosso che essi non mostrino. Il forame è piccolissimo; il setto e le lamine rostrali sono ben visibili.

Gli esemplari descritti rammentano a prima vista per la forma la *Wald. Hierlatzica* Opp. (1); però l'apice più robusto, la commessura arcuata e vicinissima agli angoli della valva perforata, e perciò il carattere del campo laterale formato quasi interamente dalla valva perforata, non ne permettono punto l'identificazione. Molto meno essi potrebbero unirsi alla *Wald. Partschi* Opp. (2), che ha l'apice assai più ristretto, le aree laterali più deboli e meno estese, la commessura laterale diritta e la fronte più attenuata. Certamente la *Wald. oxygonia* Uhl. (3) del Lias inferiore di Sospirolo è vicinissima agl'individui in esame del M. San Giuliano, perchè presenta gli stessi caratteri della commessura laterale; però la molto minore robustezza dell'apice nella specie di Sospirolo m'impedisce di aggregarvi come varietà gli esemplari di Trapani.

---

(1) Oppel, *Ueber die Brachiopoden des unteren Lias*, pag. 539—Geyer, *Op. cit.*, pag. 26, fig. 27-29.

(2) Oppel, *Op. cit.*, pag. 538, tav. X, fig. 6*a*, *b*, *c*.

(3) Uhlig, *Ueber die liasische Brachiopodenfauna von Sospirolo* ecc., pag. 23, tav. II, fig. 4, 5.

Siccome ai caratteri della linea frontale è da dare poco valore nelle specie ora citate, io credo che nel gruppo di specie e varietà, le quali hanno per forma fondamentale la *Wald. Partschi* Opp., si debbano distinguere due serie di forme, l'una formata dalla *Wald. Partschi* Opp., dalla *Wald. Hierlatzica* Opp., che sarebbe forse meglio riguardare come una varietà della prima, e dalla *Wald. oxygonia* Uhl., le quali hanno la regione apiciale molto appuntita, ristretta, non robusta e l' apice a pareti piuttosto attenuate; e l'altra dalla *Wald. securiformis* Gemm. e dalle descritte forme del M. San Giuliano, che mostrano tutte l'apice meno appuntito, molto robusto e a pareti spessite. In queste due serie si possono poi distinguere specie o varietà a commessura laterale diritta e tagliante nel mezzo o quasi gli appiattimenti laterali (*Wald. Partschi, Wald. Hierlatzica* nella prima serie e *Wald. securiformis* nella seconda) e specie o varietà con la commessura laterale arcuata e molto vicina agli angoli della valva imperforata e perciò con l'appiattimento laterale composto per la massima parte a spese della valva perforata (*Wald. oxygonia* nella prima serie e la *Waldheimia* del M. San Giuliano qui descritta nella seconda). Quest' ultima è però troppo intimamente legata con la *Wald. securiformis,* che mostra talvolta la commessura laterale leggermente arcuata verso la valva imperforata, secondo si osserva sugli esemplari del Museo geologico dell'Università di Palermo per potersi recisamente dividere come specie, e perciò io la considero come una varietà distinta pel carattere della commessura laterale vicinissima agli angoli della valva imperforata.

Questa varietà si presenta abbondante e con costanza di caratteri non solo nelle due porzioni del Lias medio del M. San Giuliano, ma anche in quello di Galati e di Castelluccio (Messina).

Noto infine che la *Waldheimia* riferita alla *Wald. oxygonia* Uhl. dal prof. Haas nel suo lavoro sulla fauna liassica del Tirolo meridionale e del Veneto, è invece certamente una forma tipica della *Wald. securiformis* Gemm., alla quale corrisponde per la forma generale, per la commessura laterale discosta dagli angoli della valva imperforata e per l' aspetto dell' apice.

Le dimensioni della descritta varietà sono le seguenti:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Lunghezza	25mm.	23mm.	23mm.	23mm.	21mm.	22mm.	19mm.
Larghezza	26.	24.	23.	20.	21.	22.	21.
Spessore	17.	16.	14.	14.	13.	13.	12.

Waldheimia Catharinae Gemm.

1874. *Waldheimia Catharinae* Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con *T. Aspasia* della provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 65, tav. X, fig. 12-13.

1879. „ *cfr. Catharinae* Uhlig, Ueber die liasische Brachiopodenfauna v. Sospirolo bei Belluno (Sitzb. d. Akad. der Wissenschf., LXXX Bd.) pag. 26, tav. II, fig. 9-11.

Di questa specie ho trovato un solo esemplare negli strati superiori del Lias medio del M. San Giuliano. Esso è ben conservato e corrisponde tanto bene all'individuo rappresentato dal prof. Gemmellaro nella tav. X, fig. 12 dell' opera citata sopra, che non fa bisogno di figurarlo e descriverlo.

La *Wald. Catharinae* Gemm. si raccoglie pure nel Lias medio della Montagnola di S. Elia presso Palermo e della contrada Sant' Anna presso Giuliana (Palermo), nonchè nel Lias inferiore di Sospirolo.

Waldheimia quadrifida Lmk. sp., *var.* lilybœa Di-Stef.

(Tav. IV, fig. 9-11.)

1819. *Terebratula quadrifida* Lamarck, Animaux sans vertèbres, vol. VI, pag. 253, n. 36.

1837. „ „ v. Buch, Essai d'une classification et déscription des terebratules (Mem. de la Soc. geol. de France, vol. III) pag. 190, tav. XVII, fig. 3.

1850. „ „ Davidson, Notes on an examination of Lamark's fossils *Terebratulae* (Ann. and. mag. of. nat. hist.) pag. 9, tav. XIV, fig. 35.

1851. „ „ Davidson, A Monograph of british oolitic and liassic brachiopoda (Palaeont. Society of London ecc.) pag. 28, tav. III, fig. 8-10.

1863. *Terebratula* (*Waldheimia*) *quadrifida* Deslongchamps, Paléontologie française; terr. jurass.; Brachiopodes, pag. 89, tav. 14, fig. 6-7; tav. 15, fig. 1-5, tav. 16, fig. 1-8

1871. *Terebratula quadrifida* Quenstedt, Petrefaktenkunde Deutschlands; die Brachiopoden, pag. 309, tav. 45, fig. 125.

1878. *Waldheimia quadrifida* Davidson, Supplement to the british jurassic and triassic brachiopoda.

1885. *Terebratula quadrifida* Quenstedt, Handbuch der Petrefaktenkunde, pag. 711, tav. 55, fig. 11.

Nella parte superiore del Lias medio del M. San Giuliano si raccolgono abbondanti esemplari di una *Waldheimia* in intima analogia con la *Wald. quadrifida* Lmk. sp. e con la *Wald. cornuta* Sow. sp. e che offrono parecchie difficoltà di sicura determinazione specifica. Essi hanno i seguenti caratteri:

Conchiglia subpentagonale, più lunga che larga, talora tanto larga che lunga, rarissimamente appena più larga che lunga, ornata al contorno di quattro lobi, due laterali e due frontali, molto leggieri, separati da leggiere depressioni, che si corrispondono sulle due valve. Questi lobi tendono a scancellarsi, segnatamente alla fronte, in modo che talvolta sono o appena visibili tutti quattro o del tutto scancellati, nel qual caso la conchiglia è molto pentagonale, e tal' altra rimangono leggieri sui lati e spariscono alla fronte, che si mostra troncata.

L' apice è molto prominente, con angolo stretto, appuntito all'estremità, molto curvato, a pareti attenuate, fornito di angoli laterali acuti e lunghi e di un forame piccolo e arrotondito. Il deltidio è piuttosto alto e largo; la linea cardinale è arcuata.

Le due valve sono poco ed egualmente convesse in generale; talvolta quella perforata è leggermente più arcuata dell'imperforata. Esse si riuniscono con un angolo molto ottuso e non di raro sullo stesso piano, essendo il contorno della conchiglia in varj casi ingrossato. La commessura è, sulla fronte e sugli angoli di essa. spezzata in leggieri zig-zag per effetto delle depressioni che danno origine ai lobi.

Le strie di accrescimento sono forti e, presso la fronte , rilevate in forma di risalti.

Il setto sulla valva imperforata e le lamine rostrali sulla perforata sono chiaramente visibili per trasparenza. Le impressioni vascolari si rilevano talora come strie irregolari e ramificate; quelle dei muscoli sono ovali ed allungate.

Le variazioni di questa *Waldheimia* stanno nella maggiore o minore chiarezza dei lobi e nella sparizione di quelli frontali, mentre quelli dei lati sogliono rimanere o ben distinti o accennati.

Se si guardano gli esemplari tipici della descritta varietà, che sono quelli predominanti nel Lias medio del M. S. Giuliano (tav. IV, fig. 8, 10, 11), si nota che per la loro forma allungata sono più vicini alla *Wald. cornuta* Sow. sp. che alla *Wald. quadrifida* Lmk. sp.; nondimeno essi sono depressi, con i lobi frontali leggerissimi e spessissimo scancellati, in modo che non possono riferirsi alla citata specie del Sowerby, sempre gonfia, con i lobi frontali ben distinti e coi laterali scancellati nella massima parte dei casi. La forma depressa della conchiglia li avvicina molto dall'altro canto alla *Wald. quadrifida,* dalla quale però si distinguono per la forma allungata, per lo meno chiara divisione dei lobi o per la loro mancanza, per la presenza di un alto deltidio, di un apice più elevato e con angolo apiciale stretto. Tuttavia è da notare che fra gli esemplari studiati se ne osserva uno (tav. IV, fig. 9), anche de-

presso, estremamente vicino alle forme poco allargate della *Wald. quadrifida* e così intimamente legato, pe' suoi caratteri e per moltissimi individui intermedj, alle altre forme molto allungate del M. San Giuliano, che è impossibile separarnelo. Per questo io ritengo che l' insieme di tutti questi individui ci rappresenti la *Wald. quadrifida* nel Mediterraneo con tali modificazioni da permettere la fondazione di una varietà *lilybæa*, che per altri può essere anche una specie distinta. Gli esemplari tipici di tale varietà ci rappresentano stabilmente nel bacino mediterraneo quelle forme che fuori sono riguardate come di passaggio dalla *Wald. quadrifida* alla *Wald. cornuta*. Lo studio di altri individui di varie regioni mediterranee potrà precisar meglio se si debba fondare una specie nuova con le forme descritte.

Dei rapporti di questi esemplari con la *Wald. Verneuili* Deslongc. è discorso a proposito di questa specie.

La *Waldheimia quadrifida* tipica è comune nelle parti elevate del Lias medio della Francia e dell'Inghilterra. Il Quenstedt la indica nel Lias δ di Hinterweiler in Germania.

L'individuo figurato nella tav. IV, fig. 9 ha le seguenti dimensioni:

Lunghezza	27mm.
Larghezza	28.
Spessore	15.

Il resto degli esemplari allungati offrono le seguenti misure:

	I.	II.	III.				
Lunghezza	27mm.	27mm.	26mm.	27mm.	25mm.	25mm.	23mm.
Larghezza	26.	25.	24.	23.	22.	23.	21.
Spessore	14.	15.	15.	13.	12.	12.	13.

Waldheimia Darwini Deslongc.

(Tav. IV. fig. 12-14)

1863-85. *Terebratula (Waldheimia) Darwini* Deslongchamps, Paléontologie francaise; terr. jurass.; Brachiopodes, pag. 128, tav. 30, fig. 1-10.

1878. *Waldheimia Darwini* Davidson, Supplement to the british jurassic and triassic brachiopoda (Palaeont. Society of London) pag. 163, tav. XXIV, fig. 9-11.

Conchiglia piccola, più lunga che larga, depressa, assai spesso asimmetrica per ineguale sviluppo dei lati, con la fronte per lo più ristretta, un po' arrotondita o leggermente troncata e talora fiancheggiata da due lievissime depressioni laterali. Le valve sono per lo più egualmente convesse, nondimeno sono molti gli esemplari nei quali la valva perforata è più convessa dell'altra. L'apice è elevato, sporgente, largo, molto curvato, fortemente carenato sui lati; il forame è di discreta grandezza e formato sotto dai due pezzi del deltidio, che è alto e largo. La linea cardinale è arcuata.

Le valve si uniscono con angolo ottuso, anzi spesso sullo stesso piano, in modo che il contorno della conchiglia si mostra ingrossato. La linea commessurale rimane generalmente sullo stesso piano per tutto il contorno o si arcua leggerissimamente sui lati, con la lieve concavità rivolta alla valva imperforata.

Sopra un solo esemplare le depressioni sui lati della fronte producono due strette e lievissime arcuazioni, poste in altro piano di quello della linea frontale.

Le strie di accrescimento sono fortissime e per lo più rilevate in forma di risalti irregolari. Sulla valva imperforata si nota per trasparenza il setto e sull'apice della perforata le due lamine rostrali.

Gli esemplari descritti corrispondono perfettamente con la *Wald. Darwini* Deslongc., della quale ho potuto anche esaminare nel Museo geologico dell'Università di Palermo varj esemplari provenienti da Subles (Calvados). Una divisione da questi è impossibile. Come è noto, il Deslongchamps considerò questa specie come poco bene definita, pe' suoi intimi rapporti con la *Wald. subnumismalis* Dav. (1). Infatti riesce difficile di poterla nettamente separare

(1) Davidson. *A Monograph of british oolitic and liassic brachiopoda*, pag. 36, tav. V, fig. 10.

da questa specie; tuttavia se si considera che essa in Francia , in Inghilterra e nel bacino mediterraneo si presenta sempre piccola, meno convessa in generale e talora con la valva imperforata appiattita; che è coperta di strie di accrescimento fortissime e rilevate, il che è in opposizione col carattere della *Wald. subnumismalis* e indica nello stesso tempo che non si tratta di giovani esemplari, si potrà con buone ragioni tenerla distinta.

Non sono da disconoscere neanco le strette relazioni che la *Wald. Darwini* ha con la *Wald. sarthacensis* d'Orb. sp. (1) del Lias medio, alla quale passa. Un esemplare del Lias del M. San Giuliano con leggiere, ma visibili depressioni latero-frontali, si avvicina singolarmente alla specie del d'Orbigny; però in generale gli esemplari della *Wald. Darwini* sono sempre molto più piccoli, più depressi sulla valva imperforata, meno allungati alla fronte, dove non hanno nè lobo, nè escavazioni, hanno l'apice meno largo e le strie di accrescimento fortissime. È da notare inoltre che sulla *Wald. Darwini*, almeno sugli esemplari siciliani e stranieri da me esaminati, non si osservano sottili linee radiali. Ciò non ostante la *Wald. subnumismalis*, la *Wald. Sartacensis* e la *Wald. Darvini* rimangono sempre tre specie vicinissime e passanti l'una all'altra.

La *Wald. Darwini* ha anche relazioni genetiche con la *Wald. perforata* Piette sp. (2), del Lias inferiore, la quale raggiunge maggiori dimensioni e ha l'apice assai più stretto e come strangolato, e con la *Wald. elliptica* Zugm. (3) del Retico.

Questa specie è più propria delle porzioni elevate del Lias medio: nel Calvados (Francia) si presenta infatti nelle zone alte di questo piano. Si raccoglie inoltre nel Lias medio del Bacino del

---

(1) D'Orbigny, *Prodrome de Paléontologie stratigraphique* ecc., 1850, vol. I, pag. 258, n. 270—Deslongchamps, *Paléontologie française; terr. jurass.; Brachiopodes*, 1863-65, pag. 130, tav. 31, fig. 1-8.

(2) Piette, *Note sur le grès d'Aiglemont et de Rimogne* (Bull. de la Soc. géol. da France 2 S., t. XIII, 1856), pag. 188, tav. X, fig. 1.

(3) Zugmayer, *Untersuchungen ueber rhätische Brachiopoden* (Beiträge z. Pal. Oesterreich Ungarns. 1 Bd, 1882) pag. 17, tav. II, fig. 6-8, 10.

Rodano (Dumortier) e in quello di Clandown Quarries (Radstock) secondo il Davidson. Choffat la indica in Portogallo negli strati di passaggio al Lias superiore e negli strati con *Leptaena* di questo.

Le dimensioni di alcuni degli esemplari studiati sono le seguenti:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Lunghezza	21mm.	19mm.	19mm.	18mm.	15mm.	15mm.
Larghezza	18.	15.	15.	15.	13.	9.
Spessore	11.	7.	7.	8.	7.	6.

Waldheimia *cfr.* **subnumismalis Davids.**

1851. *Terebratula numismalis,* var. *subnumismalis* Davidson, A Monograf of british oolitic and liassic brachiopoda (Paleont. Society of London) pag. 36, tav. V, fig. 10.

1863. *Terebratula (Waldheimia) subnumismalis* Deslongchamps, Paléontologie française; térr. jurrass.; Brachiopodes, pag. 124, tav. XVII, XVIII, XIX.

1876. *Waldheimia subnumismalis* Davidson, Supplement to the british triassic and jurassic brachiopoda (Palaeont. Society of London) pag. 162, tav. XXI, fig. 1-7.

1884. *Waldheimia (Zeilleria) subnumismalis* Parona, I brachiopodi liassici dì Saltrio e Arzo nelle Prealpi lombarde (Mem. del R. Ist. Lomb.) pag. 257, tav. V, fig. 8-14.

1889. *Waldheimia* cfr. *subnumismalis* Geyer, Ueber die liasischen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstatt (Abhandl. d. k. k. geol. R. A., XV Bd.) pag. 28, tav. III, fig. 31-32.

Nel calcare bianco con crinoidi della parte superiore del Lias medio del M. San Giuliano si raccolgono parecchi esemplari di una *Waldheimia* liscia che offre strettissimi rapporti con la *Wald. subnumismalis* Davids.

Essi sono suborbicolari o subovali , molto convessi e leggermente arrotonditi al contorno. L'apice è discretamente alto, largo, molto curvato e fortemente carenato sui lati. Il deltidio è largo e la linea cardinale arcuata. Le valve si uniscono con angolo ottuso in alcuni esemplari e acuto in altri. La commessura è diritta sui fianchi e alla fronte leggerissimamente arcuata verso la valva imperforata. La punteggiatura della conchiglia e le strie di accrescimento sono fine. Il corto setto e le due lamine rostrali sono ben visibili.

I piccoli individui corrispondono per la forma a quelli giovani figurati dal Deslongchamps, e i grandi alle figure 1, 2 della tav. 28 della *Paléontologie française ;* se non che è da notare che la loro convessità è assai spesso irregolare , perchè si presentano gonfi sotto l' apice e attenuati alla fronte. Per questo li ho determinati con qualche leggiero dubbio.

Essi si distinguono dalla *Wald. numismalis* Lmk. sp. (1) per la forma meno dilatata, molto più convessa e per l'apice più fortemente sviluppato , più alto , più curvato e non così assottigliato all' estremità.

Il Geyer (Op. cit., pag. 29) vorrebbe riunire alcune *Waldheimia* lisce del Lias inferiore di Taormina illustrate da me, e che più sotto enumero, alla *Wald. subnumismalis.* Così procedendo, potrebbero riunirsi a questa specie la massima parte delle *Waldheimia*

(1) Lamarck, *Histoire naturelle des animaux sans vertèbres;* 1819, vol. VI, pag. 249, n. 17.

del Lias lisce ed ovali, ma non so con quanta utilità per la scienza. Certamente quelle specie descritte da me appartengono al gruppo della *Wald. numismalis* e della *Wald. subnumismalis;* ma l'affermare la loro identità con una di queste due specie, delle quali sinora non si è trovata nel bacino mediterraneo nessuna forma adulta veramente tipica, sarebbe ingiustificato.

La *Zeilleria Galathea* Di-Stef. è bensì identica con la *Zeilleria Cortesei* Di-Stef., ma tutte due differiscono dalla *Wald. subnumismalis* per la forma assai allungata, per l' apice più stretto e l'angolo apiciale più acuto, nonchè per la mancanza di qualunque inflessione sulla linea frontale. Quest' ultimo carattere è ben vero che manca sugli esemplari assai giovani della *Wald. numismalis*, che del resto sono sempre dilatati, ma è costante in quelli di medio accrescimento e negli adulti. Inoltre la *Zeilleria Galathea (=Zeilleria Cortesei)* ha un setto lunghissimo e relativamente alle sue proporzioni è sempre assai più gonfia, sicchè non si può essere convinti della sua identità con la specie del Davidson.

La *Zeilleria Mazzettii* Di-Stef. non ha alcuna analogia con la *Wald. subnumismalis*, dalla quale differisce per la sua forma molto più stretta ed allungata, per l' angolo apiciale acuto, per l'apice più stretto e per la linea commessurale diritta sui lati e sulla fronte. Essa ha invece maggiori analogie con le forme della *T. punctata* Sow. ad angoli apiciali ben distinti, e dalle quali la mantengo distinta pel solo fatto della presenza di un chiaro e vero setto sulla valva imperforata. La *Zeilleria* sp. ind. aff. *Z. numismalis* da me figurata insieme alle altre citate nel lavoro " *Sul Lias inferiore di Taormina e de' suoi dintorni* „ è, per la sua forma e per l' apice assai basso e appuntito, più vicina alla *Wald. numismalis* che alla *Wald. subnumismalis.*

La *Zeilleria Carapezzae* Di-Stef. del Lias inferiore di Taormina è certamente vicina alla *Wald. subnumismalis*; però il suo contorno incompleto per ispezzamento non permette punto di poter dare un giudizio sicuro. Questa specie fu da me descritta, malgrado il suo cattivo stato di conservazione, perchè i bisogni del fatto che

io dovevo dimostrare rispetto agli strati di Taormina, allora ritenuti contemporanei a quelli di Kössen, mi costringevano a dover tener conto di tutti i fossili che vi si rinvengono. A ogni modo sinora non è punto affermabile la identità della *Zeilleria Carapezzae* con la *Wald. subnumismalis*, che ha un apice assai più largo e sviluppato. Il voler giudicare, come fa il Geyer, solo sulle figure, non sempre può condurre a giudizj esatti.

La *Wald. subnumismalis* si raccoglie nel Lias inferiore di Bösen Tritt nelle Alpi di Vils (Rothpletz) e forse anco in quello di Hierlatz (Geyer). Nel Lias medio si presenta in Inghilterra, in Francia (Normandia, Sarthe, Bacino del Rodano), nelle Prealpi Lombarde e a Gozzano nelle Prealpi piemontesi.

Waldheimia *sp. ind. aff.* **Wald. subnumismalis Davids.**

(Tav. IV, fig. 15, 16.)

Conchiglia poco convessa o depressa, subpentagonale, più lunga che larga, troncata alla fronte. Valva imperforata poco convessa negli individui adulti, depressa in quelli di medio accrescimento e nei giovani. Valva perforata in generale più convessa dell'altra, ma talora egualmente. Tutte due valve sogliono mostrare delle leggerissime depressioni frontali, che però mancano su alcuni esemplari. Talora se ne osservano le tracce solo su quella imperforata. L'apice è largo, un po' ottuso , molto curvato e fornito di angoli laterali acuti e lunghi.

Il forame è piccolo e formato sotto dai due pezzi del deltidio, che è basso e piuttosto largo.

Le valve si uniscono con angolo ottuso, e la loro commessura rimane sullo stesso piano per tutto il contorno della conchiglia. La linea cardinale è leggermente arcuata. Il setto sulla valva imperforata e le lamine rostrali su quella perforata sono ben visibili per trasparenza o per visione diretta.

La superficie della conchiglia è coperta di una fina punteggiatura. Le strie di accrescimento sono forti e presso la fronte rilevate in forma di risalto.

Di questa *Waldheimia* ho studiato solo cinque esemplari, provenienti dalla parte inferiore del Lias medio del M. San Giuliano. Essa è molto vicina alla *Wald. mutabilis* Opp. (1), alla *Wald. subnumismalis* Davids e ad altre che son citate qui sotto. Dalle forme tipiche della prima si differisce perchè meno convessa, più allungata e fornita di un apice più curvato e più largo; però si avvicina dippiù alle varietà allungate di questa specie, segnatamente a quella figurata dal Geyer nella tav. III, fig. 5 dell' opera citata. Questa forma data dal Geyer, se non è molto convessa (e questo non si rileva nè dalla figura, nè dalla descrizione) potrebbe unirsi con essa. La specie in esame è molto vicina anche alla *Wald. subnumismalis*, dalla quale solo si distingue per la forma chiaramente subpentagonale, per la molto minore convessità e per la diritta linea frontale.

Le forme della *Wald. indentata* Sow. sp. (2) con depressioni frontali leggiere rammentano anche la *Waldheimia* in esame, però esse se ne distinguono soprattutto per la grande gonfiezza. La *Wald. stapia* Opp. (3) e la *Wald. Engelhardti* Opp. hanno pure relazioni con questa *Waldheimia*; ma se ne differiscono bene, la prima per le sue piccole dimensioni, la molto maggiore convessità, la forma più stretta, più allungata e non chiaramente subpentagonale, e la seconda, oltre che per le minori dimensioni, per la sua gonfiezza. Anche la *Wald. subdigona* Opp. (4), che però il Davidson (5) dice identica con la *Wald. Waterhousi* Davids. del Lias medio inglese, si avvicina molto alla nostra forma; però essa è più piccola, più gonfia e non subpentagonale.

---

(1) Oppel, *Ueber die Brachiopoden des unteren Lias*, pag. 538, tav. X, fig. 7.— Geyer, *Ueber die liasichen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstatt*, pag. 18, tav. II, fig. 31; tav. III, fig 1-7.

(2) Sowerby, *Mineral Conchology of Great Britain*, 1825, vol. V, pag. 65, tav. 445.

(3) Oppel, *Ueber die Brachiopoden des unteren Lias*, pag. 539, tav. XI, fig 2.

(4) Oppel, *Der mittler Lias Schwabens, (Stuttgart)*, 1853, pag. 71, tav. IV, fig. 2.

(5) Davidson, *Supplement to the british jurassic and triassic Brachiopoda*, pag. 174.

Come si vede, questa *Waldheimia* è in istretta relazione con molte specie, senza che si possa identificare con nessuna: sarebbe perciò utile dare un nuovo nome specifico; però il ristretto numero di esemplari che ho potuto studiare e quindi la poco estesa conoscenza de' suoi caratteri m'inducono a non farlo. Essa pertanto va posta, pel suo aspetto e pel carattere del largo apice, nel gruppo della *Wald. subnumismalis* Davids.

Le dimensioni di questa forma degli strati inferiori del Lias medio del M. San Giuliano sono le seguenti :

	I.	II.	III.	IV.	V.
Lunghezza	26mm	25mm	24mm	22mm	20mm
Larghezza	21	20	22	20	18
Spessore	13	12	13	18	9

SEZ. PLESIOTHYRIS.

Waldheimia Vern euili Deslongch., *var.*

(Tav. IV, fig. 17-18)

1863. *Terebratula Verneuili* Deslongchamps, Études critiques sur des brachiopodes n o uveaux ou peu connus, tav. XV, fig. 2, 3.

1864-85. *Terebratula (Waldheimia) Verneuili* Deslongchamps , Paléontologie française; terr. jurass.; Brachiopodes ; p. 179, tav. 48, fig. 2, 3.

Conchiglia più lunga che larga , subpentagonale, non di raro asimmetrica per ineguale sviluppo dei lati della conchiglia , più o meno depressa nelle forme giovani e di medio accrescimento e

in talune adulte, discretamente convessa o quasi gonfia in altre ben accresciute. Valva imperforata per lo più leggermente meno convessa dell' imperforata, non di raro egualmente, ornata di tre depressioni, una frontale, di profondità assai variabile, e due laterali molto larghe, ora forti, ora leggiere, in modo che la conchiglia mostra su tale valva due pieghe frontali e due lobi laterali, che sono o discretamente distinti o deboli. Valva perforata molto curvata, fornita di un leggiero rigonfiamento frontale, corrispondente alla depressione dell' altra valva, fiancheggiato spesso da due leggieri solchi. Essa mostra sui lati due lobi ottusi e poco distinti. Apice largo, elevato e prominente in generale, molto curvato, fortemente carenato sui lati, appuntito e troncato da un piccolo forame. Deltidio largo e basso; linea cardinale largamente arcuata.

La linea commessurale è inflessa a zig-zag sulla fronte, per effetto delle tre depressioni della valva imperforata.

La conchiglia è coperta di una punteggiatura finissima e fitta, e di strie di accrescimento forti e, presso la fronte, rilevate spesso in forma di risalti.

Sull'apice della valva perforata si scorgono, per trasparenza o per diretta visione nelle fratture, due lamine rostrali; sulla valva imperforata si osserva un chiaro e lungo setto, nonchè le impressioni muscolari lunghe, strette ed ovali, e quelle vascolari ramificate, ma non esattamente descrivibili.

Questa specie è molto variabile: essa va dalle forme depresse a quelle quasi gonfie; da quelle a pieghe frontali forti ad altre che le hanno cortissime e appena accennate. I solchi che fiancheggiano il leggiero rigonfiamento frontale della valva perforata spesso mancano; i lobi della conchiglia si determinano talora sulla metà della sua lunghezza e tal'altra, segnatamente nelle forme giovani e depresse, assai vicino alla linea frontale. L' irregolarità del loro sviluppo rende la conchiglia non di raro asimmetrica.

Gli esemplari descritti mostrano due lamine rostrali, un lungo setto, un apice appuntito, carenato sui lati e un piccolo forame, per il che debbono riguardarsi come delle *Waldheimia* biplicate.

Certamente la *Wald. Verneuili* ha, pe' suoi caratteri generici, stretti rapporti con la *Ter. (Coenothyris) vulgaris* Schloth. del Trias; nondimeno quest' ultima pel suo tipo paleozoico e per taluni caratteri interni (1), nonchè pel largo suo forame, non potrebbe aggregarsi alle *Waldheimia* giurassiche, mentre la *Wald. Verneuili* per l'insieme dei contrassegni notati non può separarsi dal genere *Waldheimia*, per metterla, come fa il *Rothpletz (Geologisch-palaeontologische Monographie der Vilser Alpen,* pag. 76 e pag. 106), nelle *Terebratula*. Ognuno dei caratteri generici delle *Waldheimia* può bene non essere costante; ma la compiuta riunione di essi in una specie come la *Wald. Verneuili,* costringe a porre questa in tale gruppo; nè la forma *biplicata* può esser tenuta come buon argomento per separarla, perchè, come è noto , spesso le forme esterne di certi gruppi si riproducono in altri più o meno differenti. Per indicare le *Waldheimia* biplicate basterebbe solo il nome *Plesiothyris* (2), che del resto è da accettare solo come indicante una sezione. I *Plesiothyris* però non possono riguardarsi, secondo recentemente fece con dubbio il Deslongchamps (3) , come appartenenti alle *Antiptychina* , Zittel , perchè queste appena potrebbero costituire alla loro volta una sezione delle *Waldheimia*, nè alle *Macandrewia,* alle quali lo Zittel dubbiosamente le riunisce (4), e che sono distinte dall'essenza del setto e da vari altri particolari dell' apparecchio interno e dalla mancanza di deltidio.

Gl'individui in esame sono, pei caratteri generici e specifici, intimamente legati alla *Wald. Verneuili,* Deslongc. e in modo che io non saprei recisamente separarli. È ben vero che essi si mostrano tutti, meno larghi, più allungati, più ovali e non di raro più con-

---

(1) Koschinsky , *Beiträge zur Kenntniss von T. vulgaris Schloth.* Zeitischr. d. deutsch. geol. Gesellscaft, 1878, XXX Bd.) pag. 375.

(2) Douvillè, *Notes critiques sur quelques genres de brachiopodes* ecc. , 1879 (Bull. de la Soc. geol. de France, 3 S. t. VII) pag. 275.

(3) Deslongchamps, *Etudes critiques sur des brachiopodes nouveaux ou peu connus*, 1884, pag. 186.

(4) Zittel, *Handbuch der Palaeontologie*, I , 1883, pag. 703.

vessi sulla valva imperforata, la quale non sempre è depressa; ma queste differenze possono giustificare al massimo la fondazione di una varietà, anzichè di una specie ben distinta, avuto riguardo alla variabilità di simili conchiglie.

Sono anche molto strette le relazioni di questi esemplari con quella forma della *Ter. Jauberti* Deslongc. figurata nella tav. 46, fig. 4*a*, *b*, *c*, *d* della " *Paléontologie française; terr. jurass.; Brachiopodes* „ alla quale singolarmente si avvicinano taluni individui del M. S. Giuliano discretamente convessi e con apice un po' più basso del solito (tav. IV, fig. 18 del presente lavoro). Io avrei aggregato tale forma della *Ter. Jauberti* alla *Waldheimia* del M. S. Giuliano in esame, se gl'individui piccoli e di medio accrescimento di questa, per la loro forma ovaleallungata e depressa, non differissero del tutto dai coetani della *T. Jauberti* figurati dal Deslongchamps, e se si potesse esser sicuri che la *T. Jauberti* sia invece una *Waldheimia*. Pur troppo la determinazione generica di questa specie non è sicura sinora, perchè, se essa mostra acuti angoli apiciali, ha però dubbie traccie di un setto (Deslongchamps), e non fa rilevare lamine rostrali. Tuttavia i rapporti dell'esemplare della *T. Jauberti* già citato e dell'altro della tav. 48, fig. 1 dell'opera menzionata del Deslongchamps sono sì stretti con la *Wald. Verneuili* e perciò con la *Waldheimia* siciliana qui descritta, che io non ritengo improbabile possa essere dimostrato dall'ulteriore studio dei caratteri generici e specifici la necessità di staccarli dalle rimanenti forme della T. *Jauberti* per associarli agli individui del Monte S. Giuliano e alla *Wald. Verneuili*.

Debbo notare che un'associazione di questa *Waldheimia* di Trapani con la *Wald. quadrifida* Lmk. sp., var. *lilybæa* Di-Stef. o con la *Wald. cornuta*. Sow. sp. è impossibile, perchè queste mostrano sulla fronte due depressioni corrispondenti, cioè una su ogni valva, e appartengono quindi a un altro gruppo (*Zeilleria*), mentre quella in esame nel presente scritto ha invece per corrispondente alla depressione frontale della valva imperforata un leggiero rigonfiamento e presenta i caratteri delle Terebratule biplicate.

La *Wald. Verneuili* Deslongc. si presenta nel Lias medio della

Spagna e negli strati con *Pect. acuticostatus* di Thomar in Portogallo (Choffat), i quali comprendono certo varj livelli liassici.

La varietà descritta si raccoglie solo nella parte superiore del Lias medio del M. San Giuliano, con molta abbondanza. Essa ha le seguenti dimensioni:

	I.	II.	III.	IV.	V.		VI.	VII.
Lunghezza	35^{mm}	35^{mm}	33^{mm}	33^{mm}	32^{mm}	30^{mm}	27^{mm}	25^{mm}
Larghezza	28	27	27	25	23	25	23	22
Spessore	18	18	18	15	15	16	13	12

SEZ. AULACOTHYRIS.

Waldheimia Ewaldi Opp.

1861. *Terebratula (Waldheimia) Ewaldi* Oppel, Ueber die Brachiopoden des unteren Lias (Zeitschr d. deutsch. geol. Gesellschf. XIII. Bd.) pag. 539, tav. XI, fig. I.

1874. *Waldheimia Ewaldi* Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con T. *Aspasia* nella provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 69, tav. X, fig. 7-8.

1886. „ *frontensis* Rothpletz, Geologisch-palaeontologische Monographie der Vilser Alpen (Palaeontograpica, XXXIII Bd.) pag. 126, tav. XIII, fig. 16, 17.

1889. „ *Ewaldi* Geyer, Ueber die liasischen Brachiopoden des Hierlatz bei Hallstatt (Abhandl. d. k. k. geol. R. A., XV. Bd.) pag. 31, tav. IV, fig. 3-7.

Di questa specie ho raccolto solo due esemplari nella parte inferiore del Lias medio del M. San Giuliano. Essi sono leggermente slargati e corrispondono alle varietà accorciate. Il loro paragone con parecchi esemplari della *Wald. Ewaldi* Opp., provenienti da Hierlatz e conservati nel Museo geologico dell'Università di Palermo, mi ha convinto della loro esatta determinazione.

Come fu già notato dal Geyer la *Wald. Ewaldi* è estremamente vicina alla *Wald. Waterhouse* Davids (1), e forse le si potrebbe riunire, tenuto conto che la presenza del lobo della valva perforata nella *Wald. Waterhouse* è un carattere variabile (vedi *Wald. Waterhouse* in Deslongchamps, *Pal. franc.; terr. jurass., brach.; tav. XXI, fig. 1-6.*).

La *Wald. Hayseana* Dunker tipica (2) e la *Wald. Sospirolensis* Uhl. (3) sono specie molto vicine alla *Wald. Ewaldi*, ma che tuttavia si possono tener separate. La prima se ne differisce perchè troppo slargata e fornita di lobo nella valva perforata e di un lungo lembo in quella imperforata; la seconda se ne allontana molto dippiù, perchè assai più allungata e ristretta sopra, e fornita di due depressioni frontali corrispondenti.

La *Wald. frontensis* Rothpl. (4) del Lias inferiore di Bösen Tritt corrisponde alle varietà poco gonfie della *Wald. Ewaldi* e non può separarsene. La *Wald. civica* Can. (5) del Lias medio dell'Appennino centrale è probabilmente la *Wald. Ewaldi*; però l'esemplare figurato dal prof. Canavari è troppo mal conservato e non fa dare quindi un giudizio sicuro.

---

(1) Davidson, *A Monograph of british oolitic and jurassic brachiopoda*, pag. 31, tav. V, fig. 12, 13.

(2) Dunker, *Ueber einige neue Versteinerungen aus verschiedenen Gebirgsformationen* (Palaeontographica, 1 Bd.) pag. 129, tav. XVIII, fig. 5.

(3) Uhlig, *Ueber die liasische Brachiopodenfauna von Sospirolo bei Belluno*, pag. 28, tav. III, fig. 1-6.

(4) Rothpletz, *Op. cit.*, pag. 127, tav. XIII, fig. 16, 17.

(5) Canavari, *Contribuzione III alla conoscenza dei brachiopodi degli strati a T. Aspasia nell'Appennino centrale*, pag. 88, tav. X, fig. II.

Gli esemplari indicati dal prof. Parona coi nomi di *Wald.* cfr. *Ewaldi* Opp. (*Il calcare liassico di Gozzano ecc. pag. 16, tav. II, fig. 3*) e di *Wald.* sp. ind. cfr. *Ewaldi* Opp. (*I brachiopodi liassici di Saltrio ecc., pag. 259, tav. V, fig. 15*) sembrano identici; però la loro grande gonfiezza rispetto alla *Wald. Ewaldi* Opp. mi pare che ne giustifichi la separazione in una specie distinta, sebbene molto affine. La *Waldheimia* f. n. che il Parona figura nella tav. V, fig. 16, 17 del citato lavoro sui brachiopodi Saltrio e Arzo, può riunirsi invece alla *Wald. Ewaldi* Opp., perchè non ne differisce essenzialmente.

La *Wald. Ewaldi* si raccoglie in Sicilia, oltre che al M. San Giuliano, nel Lias medio della Montagnola di S. Elia (Palermo) e delle Rocche rosse di Galati (Messina). Altrove si presenta nel Lias inferiore di Hierlatz, nel medio di Arzo (Prealpi lombarde), nell' inferiore delle Alpi di Vils.

SEZ. ANTIPTYCHINA.

Waldheimia Rothpletzi Di-Stef.

(*Tav. IV, fig. 20-23.*)

1884. *Waldheimia (Aulacothyris) linguata, var major* Haas, (non Böckh) Beiträge zur Kenntniss der liasischen Brachiopodenfauna von Südtyrol und Venetien, pag. 25, tav. IV, fig. 5.

1886 „ *Haasi* Rothpletz, Geologisch-palaeontologische Monographie der Vilser Alpen ecc. (Palaeontographica, XXXII Bd.) pag. 129.

Bella specie depressa, slargata trasversalmente, oppure tanto larga che lunga o più lunga che larga. Valva imperforata depres-

sa, con la massima convessità sulla regione umbonale, d'onde scende alla fronte deprimendosi rapidamente. Essa porta un seno frontale leggiero e largo, che comincia rapidamente sulla metà inferiore della conchiglia e alla fronte è un po' sporgente dal contorno e riflesso indietro. Dentro questo seno si scorge generalmente una piega mediana e frontale, larga, ma molto leggiera, fiancheggiata da due solchi assai lievi. Questa piega, mentre spesso è indicata da una ben chiara ondulazione della commessura, diventa talora appena visibile e tal' altra sparisce del tutto. La valva perforata è in generale più convessa, specialmente lungo la sua linea mediana; in certi casi lo è egualmente quanto l' imperforata, ornata sempre di un rigonfiamento frontale a forma di lobo, largo e molto leggiero, sul cui dorso si scorgono le tracce di un seno largo e leggerissimo, che suol giungere fino al principio della regione apiciale. Tal seno corrisponde alla piega dell' altra valva, ed è perciò ora visibile, ora scancellato. Il lobo suole essere fiancheggiato da due lievissime e strette depressioni.

L' apice è basso, largo, appuntito all' estremità, molto curvato, fornito di angoli laterali acutissimi, e troncato da un forame molto piccolo. Il deltidio è largo e basso; la linea cardinale lunga e leggermente arcuata.

Il contorno della conchiglia è per lo più tagliente. La commessura laterale, quando il seno è sporgente, si arcua leggermente presso la fronte, con la convessità dell' arcuazione rivolta verso la valva imperforata; quella frontale è più o meno flessuosa per effetto delle pieghe e dei solchi.

Sull' apice della valva perforata sono visibili le due lamine rostrali; su quella imperforata un lungo setto e le impressioni muscolari strette, ovali ed allungate.

La superficie della conchiglia è coperta di una fina punteggiatura e di abbondanti linee, sottili e rilevate, raggianti dagli apici.

Gli esemplari descritti mostrano i caratteri delle *Antiptychina*, secondo le intende lo Zittel. Di questo gruppo può farsi una sezione delle *Waldheimia*, ma non un genere nettamente diviso, per-

chè ha di esse i caratteri generici essenziali. Gl'individui del M. San Giuliano hanno talora la piega mediana del seno così scancellata, che riesce difficile di poterle separare dagli *Aulacothyris*.

La *Waldheimia* in esame corrisponde del tutto a quella del M. Lavarella presso S. Cassiano figurata dal prof. Haas nella tav. IV, fig. 5 del suo lavoro " *Beiträge z. Kenntn. der lias. Brachiopodenfauna von Südtyrol ecc.* „ col nome di *Wald. (Aulacothyris) linguata* Böckh, var. *minor* Böckh. Esse però si distinguono dalla specie del Böckh (1) per la forma meno dilatata, pel seno più sporgente, per la forma più convessa, nonchè pei differenti caratteri ornamentali della fronte. Il dott. Rothpletz (2) separando la citata *Waldheimia* di S. Cassiano da quella ungherese, le diede il nuovo nome di *Wald. Haasi* Rothpl.; ma questa denominazione bisogna mutarsi, perchè esisteva di già una *Wald. Haasi* Buckmann (3): per questo io la ho indicata nel presente lavoro come *Wald. Rothpletzi* Di-Stef.

La *Wald. Hayseana* Deslongc. (non Dunker) (4) pare differente da quella del Dunker (5); essa ha però molti rapporti con la *Wald. Rothpletzi* e se ne differisce per la sua gonfiezza, per la fronte coartata in generale, per la mancanza di piega e di solchi nel seno frontale, nonchè di tracce di seno sul lobo della valva perforata. Essa è inoltre sempre più piccola. Gli esemplari riferiti dal Quenstedt (6) alla *Wald. Hayseana* non corrispondono neanco al tipo del Dunker, e sono invece intimamente legati con la *Wald. Rothpletzi,* alla quale si potrebbero riunire, almeno gl'individui della tav. 45, fig. 139, 141, 142, dell'opera del Quenstedt citata sotto, se le indicazioni che dà il Quenstedt sui caratteri dell'apice, del forame e del

(1) Böckh, *Die geologischen Verhältnisse des südl. Theiles des Bakony*, II, pag. 151.

(2) Rothpletz, *Op. cit.* pag. 129.

(3) Davidson, *Appendix to the Supplements to the british fossil Brachiopoda* (Palaeont. Society of London, 1882-84) pag. 265, tav. XIX, fig 11, 12.

(4) Deslongchamps, Paléontologie française; terr. jurass.; Brachiopodes, pag. 113, tav. 24, fig. 1-5.

(5) Dunker, *Op. cit.* pag. 129, tav. XVIII, fig. 5 (1847).

(6) Quenstedt, *Petrefaktenkunde Deutschlands; die Brachiopoden*, pag. 315, fig. 139-142.

deltidio non rendessero oscura l'appartenenza generica di tali forme.

La *Wald. Meneghinii* Par. (1) del Lias medio di Gozzano (Piemonte) è anche vicinissima alla *Wald. Rothpletzi,* tanto che si sarebbe tentati di unirle ; però la specie del Parona è meno slargata, più gonfia e mostra i caratteri del gruppo (*Antiptychina*, Zittel o *Coarctatae*, Rothpletz) fortemente impressi, il che non è il caso nella *Waldh. Rotphletzi,* che fa osservare solo l'inizio dei caratteri della sua sezione.

Non c' è bisogno di fermarsi sulle differenze della specie descritta con la *Wald. apennica* Zitt. e con la *Wald. furlana* Zitt. (2).

Nel Dogger inferiore ci sono specie prossime alla *Wald. Rothpletzi*, come la *Wald. Haasi* Buckmann (*Wald. angustipectus* Rothpl. p. p.), la *Wald. angustipectus* Rothpl., secondo la recente restrizione fattane dal suo autore (3), e la *Wald. supinifrons* Rothpl. (4). Il gruppo delle *Antiptychina* si può eseguire fino nel Malm , ove si presenta la specie più giovane conosciuta sinora (*Wald. subcanalis* Münst. non Suess).

La *Wald. Rothpletzi* è abbondante nella parte inferiore del Lias medio del M. San Giuliano. Le dimensioni di alcuni esemplari sono le seguenti:

	I.	II.	III.	IV.	V.
Lunghezza	21.mm	21.mm	20.mm	17.mm	16.mm
Larghezza	22.	21.	21.	20.	18.
Spessore	10.	10.	9.	7.	6.

(1) Parona, *Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili,* pag. 10, tav. 1, fig. 5.—*I brachiopodi degli strati a T. Aspasia* ecc. pag. 20, tav. II, fig. 12.

(2) Zittel, *Geologische Beobachtungen aus den Central-Apennin,* pag. 127, tav. 14, fig. 9 *W. apenninica)* pag. 128, tav. 14, fig. 8 (*W. furlana*).

(3) Rothpletz, *Nachträgliches zu der geologisch-palaeontologischen Monographie der Vilser Alpen* (N. Jahrbuch ecc. Bd. II, 1889).

(4) Rothpletz, *Geologisch-palaeontologische Monographie der Vilser Alpen,* pag. 130, tav. VIII, fig. 37, 39-40; tav. IX, fig. 18, 22, 23, 30.

Gen. Kingena Davidson

Kingena Capellinii Di-Stef.

(Tav. IV, fig. 24-26)

Conchiglia piccola, depressa, slargata trasversalmente. Valva imperforata appiattita, talora leggermente convessa sulla regione umbonale, fornita alla fronte di una depressione a forma di seno leggiero, in varj casi scancellata e non di raro spostata verso un lato o l' altro della conchiglia. Valva perforata molto più convessa dell' altra, un po' gibbosa sulla sua linea mediana. Apice piuttosto sporgente, fortemente curvato, provvisto di una piccola falsa area, troncato da un largo forame arrotondito, formato sotto in parte dai due pezzetti di un deltidio rudimentare, i quali rimangono disgiunti, in modo che tal forame giunge fino alla linea cardinale.

Questa è lunga rapporto alle proporzioni della conchiglia e lievemente arcuata alle estremità.

La superficie della conchiglia è ornata di fitti tubercoli, regolari e distinti.

Quando mancano i primi strati della conchiglia si manifestano sul modello le strie numerose, fine e spesso biforcate, che sogliono ornare la superficie interna delle valve delle *Kingena*. Le due valve portano forti strie di accrescimento, che sulla regione frontale pigliano la forma di leggieri risalti. Sull' apice della valva perforata si notano due corte lamine rostrali e un corto setto mediano.

Questa specie è vicina alla *King. Deslongchampsi* Davids. (1) e alla *King. Josephinia* Gemm.; però se ne distingue per la sua forma trasversalmente slargata e per la linea cardinale più lunga e appena arcuata all'estremità. Essa ha inoltre l' apice assai più curvo e

(1) Davidson, *Examin. of Lamarcks Species ecc.* (Ann. and Mag. of Nat. History, 1850; 2 S. vol. V) pag. 450, tav. XV, fig. 6.

più stretto di quello della *King. Deslongchampsi* e una distribuzione di tubercoli più regolari.

Alcuni dei caratteri di questa conchiglia differiscono da quelli delle *Kingena* note sinora, perchè le sue valve non sono egualmente convesse, la linea cardinale è ben lunga e la forma della conchiglia è slargata trasversalmente. Nondimeno essa non può riferirsi che alle *Kingena*: i caratteristici tubercoli della superficie, la presenza del setto e il carattere dell' apice lungo, assai curvato e non fortemente troncato la differiscono dalle *Megerlia*.

Questa specie è assai abbondante negli strati elevati del Lias medio del M. San Giuliano. Le sue dimensioni sono le seguenti:

	I.	II.	III.	IV.
Lunghezza	10.mm	9.mm	9.mm	10
Larghezza	11.	10.	10.	10
Spessore	4.	3.	4.	

Kingena Josephinia Gemm.

1874. *Kingena Josephinia* Gemmellaro, Sopra i fossili della zona con T. *Aspasia* della provincia di Palermo e di Trapani (Sopra alcune faune giuresi e liasiche della Sicilia) pag. 72, tav. XI, fig. II.

Nella parte superiore del Lias medio del M. San Giuliano si raccolgono molti esemplari di una *Kingena* distinta dalla *King. Capellinii* Di-Stef. che le è associata, ma corrispondente invece agl' individui tipici della *King. Josephinia* Gemm. conservati nel Museo geologico dell'Università di Palermo. Essi raggiungono però maggiori dimensioni e hanno l'apice più sviluppato. Sulla regione frontale della valva imperforata si scorge un lieve accenno di seno, mancante negli esemplari figurati dal prof. Gemmellaro, i quali sono piccoli.

Questa specie si raccoglie in Sicilia anche nel Lias medio di Chiusa-Sclafani (Palermo).

Le dimensioni di alcuni esemplari sono le seguenti:

	I.	II.	III.
Lunghezza	9.^{mm}	9.^{mm}	9.^{mm}
Larghezza	8.	7.	9.
Spessore	4.	3.	4.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE [1]

TAVOLA I.

Fig. 1*a*, *b*, *c*, *d*. *Spiriferina sicula* Gemm. (Rocche rosse di Galati).

» 2*a*, *b*.; 3. » » (M. San Giuliano, parte inf.).

» 4*a*, *b*. » *Darwini* Gemm. (M. San Giuliano, parte sup.).

» 5*a*, *b*. » *Statira* Gemm. (Castelluccio presso Taormina).

» 6*a*, *b*, *c*. » *Geyeri* Di-Stef. (M. San Giuliano, parte sup.).

» 7*a*, *b*, *c*. » *Zignoi* Di-Stef. (M. San Giuliano, parte inf.).

» 8*a*, *b*.; 9. » *segregata* Di-Stef. (M. San Giuliano, parte inf.).

» 10. » » (ingrandimento delle coste — M. San Giuliano parte sup.).

» 11. » » (M. San Giuliano, parte inf.).

» 12*a*, *b*, *c*. » (M. San Giuliano, parte sup.).

» 13. » *gibba* » Seg. (Castelluccio presso Taormina).

» 14, 15 varietà [2] intermedia tra la *sp. gibba* Seg. e la *Sp. angulata* Opp. (Castelluccio presso Taormina).

» 16. » *gibba* Seg. (M. San Giuliano, parte sup.).

TAVOLA II.

Fig. 1*a*, *b*. *Spiriferina gibba* Seg. (M. San Giuliano, parte sup.).

» 2*a*, *b*, *c*. *Rhynchonella curviceps* Quenst. sp. (M. San Giuliano, parte inf.).

» 3*a*, *b*, *c*, » *tetraedra* Sow. sp. (M. San Giuliano, parte sup.),

» 4*a*, *b*. » *serrata* Sow. sp. (M. San Giuliano, parte inf.).

» 5*a*, *b*, *c*, *d*. » » var. *Kiliani* Di-Stef. (Idem).

» 6*a*, *b*, *c*, *d*. » *Glycinna* Gemm., var. (Rocche rosse di Galati).

» 7*a*, *b*, *c*. » *palmata* Opp. (Rocche rosse di Galati).

» 8*a*, *b*, *c*. » *Dalmasi* Dumortier (M. S. Giuliano, parte inf.).

» 9*a*, *b*, *c*. » » (M. San Giuliano, parte sup.).

» 10*a*,*b*,*c*,*d*.; 11*a*,*b*; 12*a*,*b*,*c*,*d*. » (M. San Giuliano, parte inf.).

» 13*a*, *b*. » *ptinoides* Di-Stef. (Rocche rosse di Galati).

---

(1) Le specie figurate in queste tavole si trovano nelle collezioni del Museo geologico dell'Università di Palermo.

(2) La profondità del seno nella fig. 14 è, per errore del disegno, un po' esagerata.

TAVOLA III.

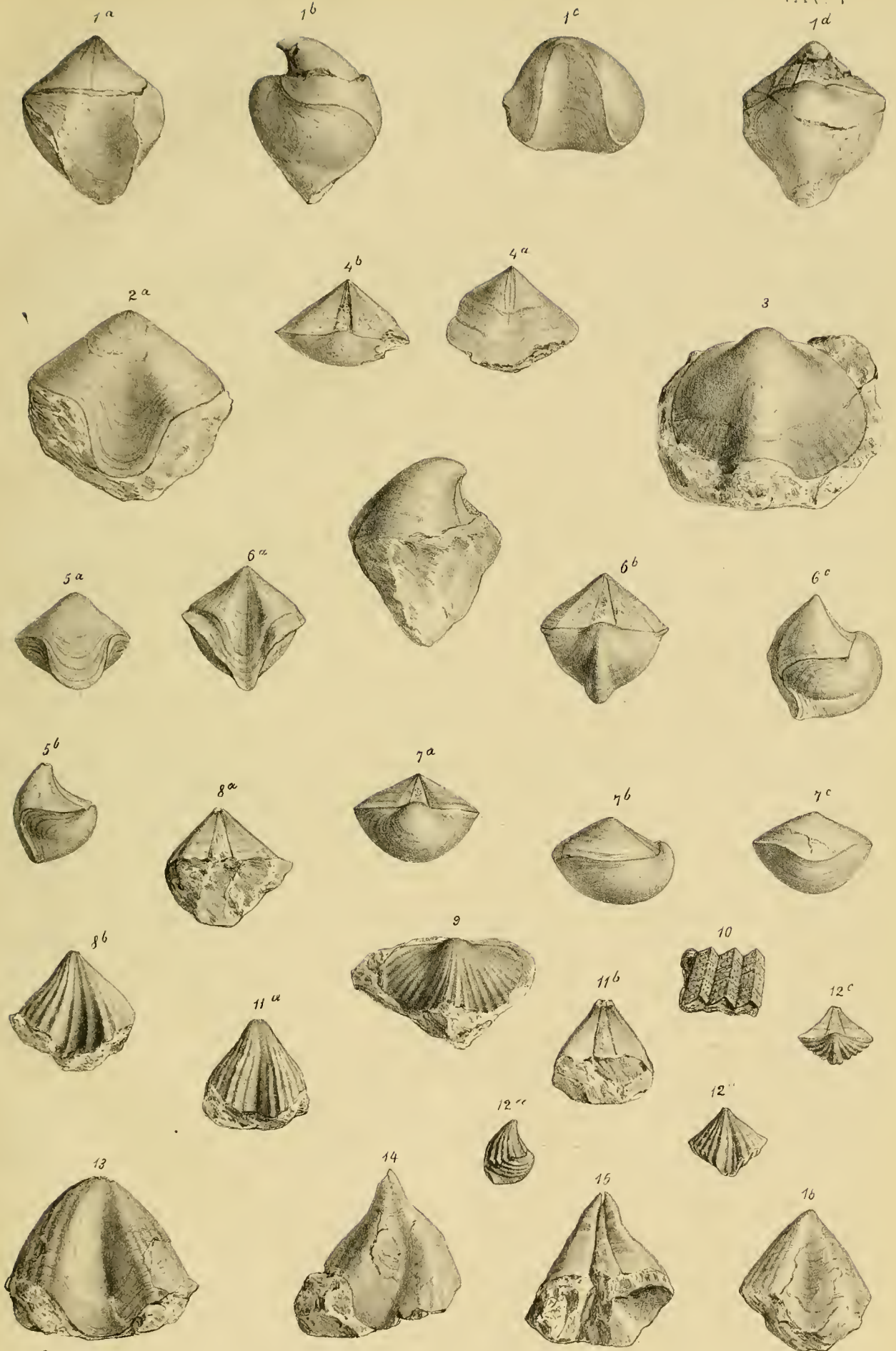
Fig. 1*a*, *b*, *c*, *d*. *Rhynchonella ptinoides* Di-Stef. (Rocche rosse di Galati).
» 2*a*, *b*, *c*, *d*. » *Eleuteria* Di-Stef. (M. S. Giuliano, parte sup).
» 3; 4*a*, *b*, *c*. » » (Idem)
» 5*a*, *b*, *c*. *d*. » » (Idem)
» 6*a*, *b*; 7*a*, *b*; 8. » » (Idem)
» 9*a*, *b*, *c*, *d*; 10*a*, *b*; 11*a*, *b*. *Briseis* Gemm. (M. San Giuliano, parte inf.).
» 12. » » (Rocche Rosse di Galati).
» 13*a* *b*. » » (M. San Giuliano, parte inf.).
» 14*a*, *b*, *c*, *d*. » » var. *Iphimedia* Di-Stef. (M. San Giuliano, parte inf.).
» 15, 16*a*, *b*, *c*. » » » (Idem)
» 17*a*, *b*; 18*a*, *b*, *c*. » » » (Idem)
» 18*a*, *b*, *c*. » *Zugmayeri* Gemm. (M. S. Giuliano, parte sup.).

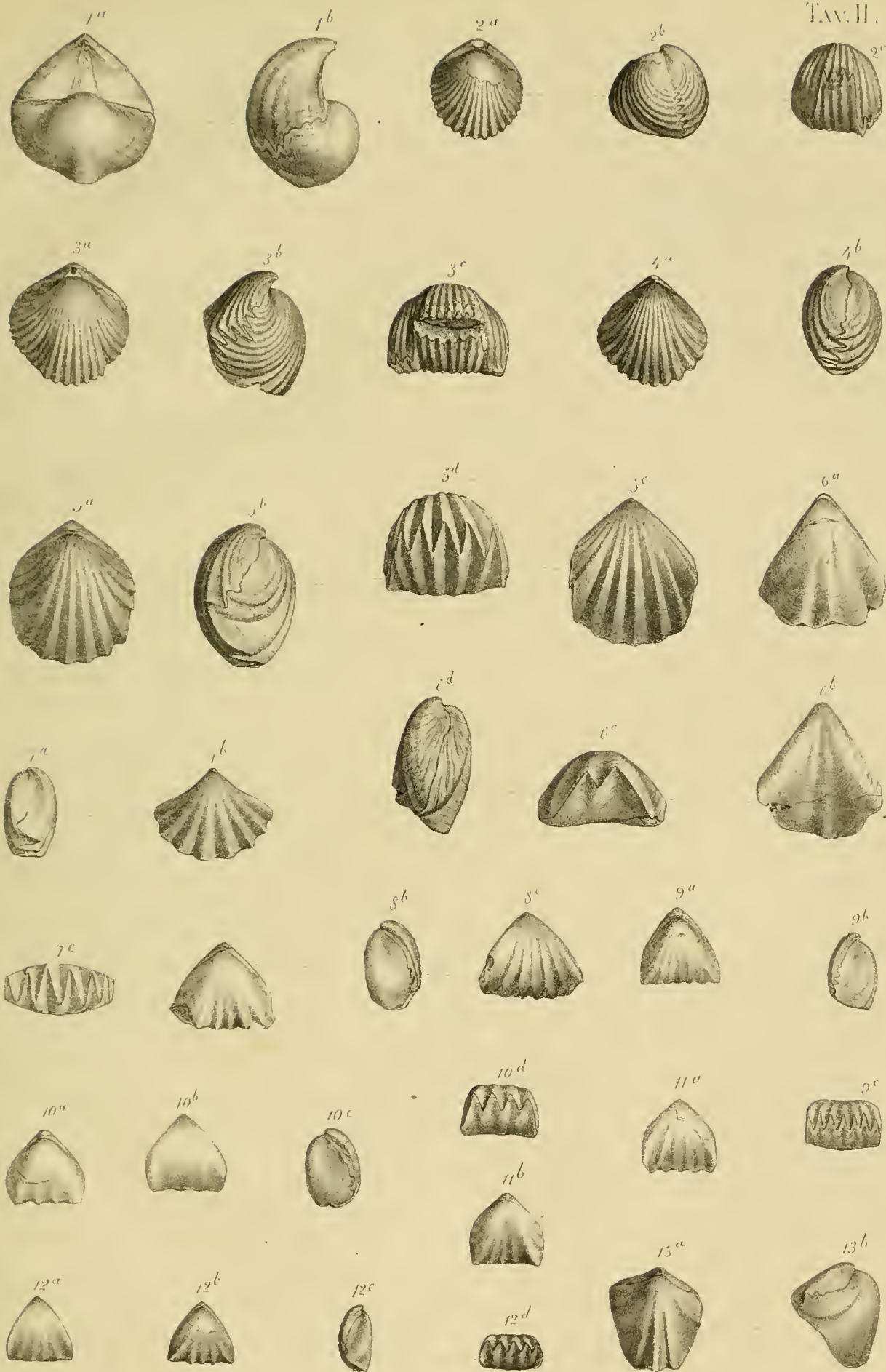
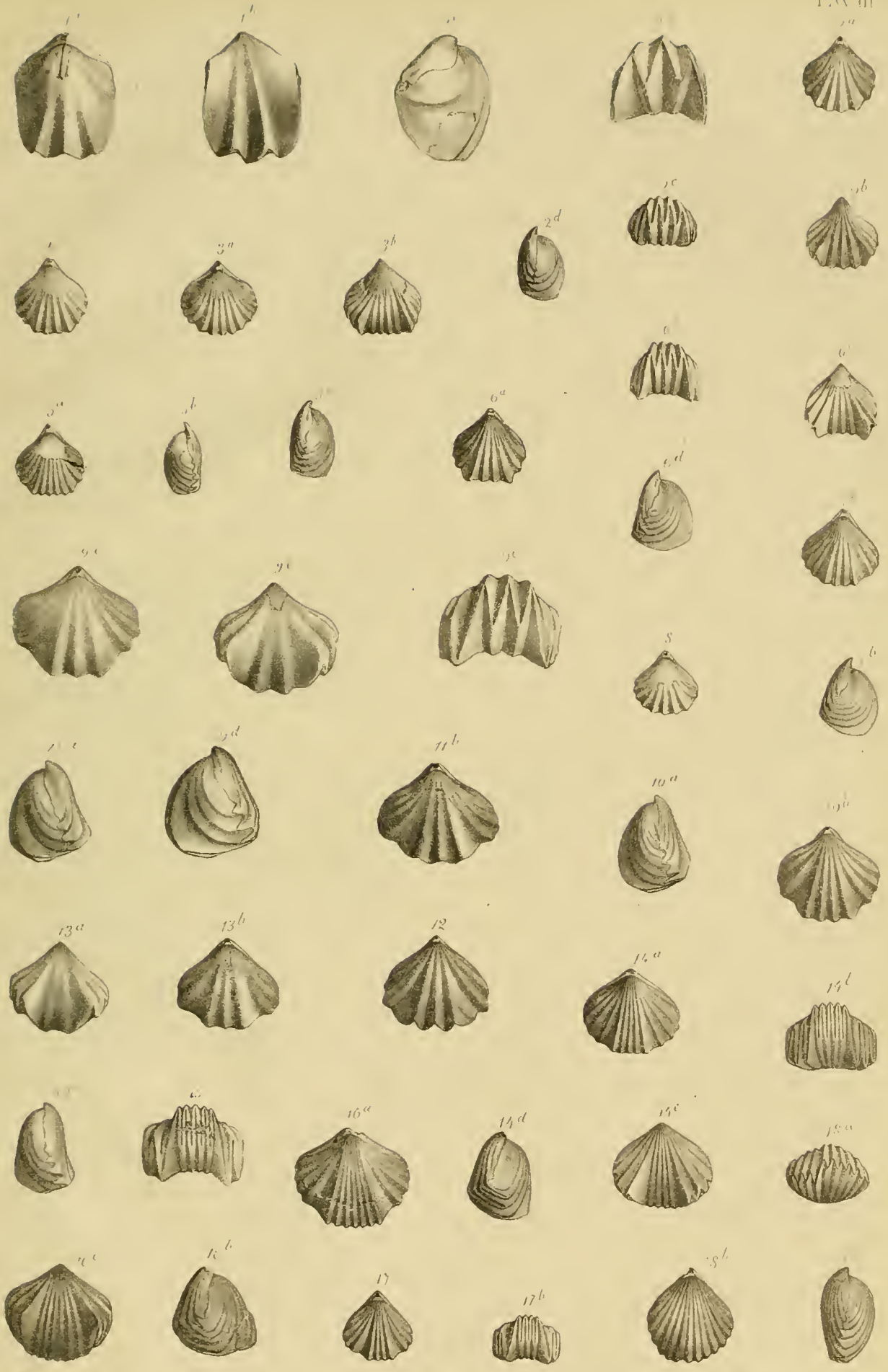
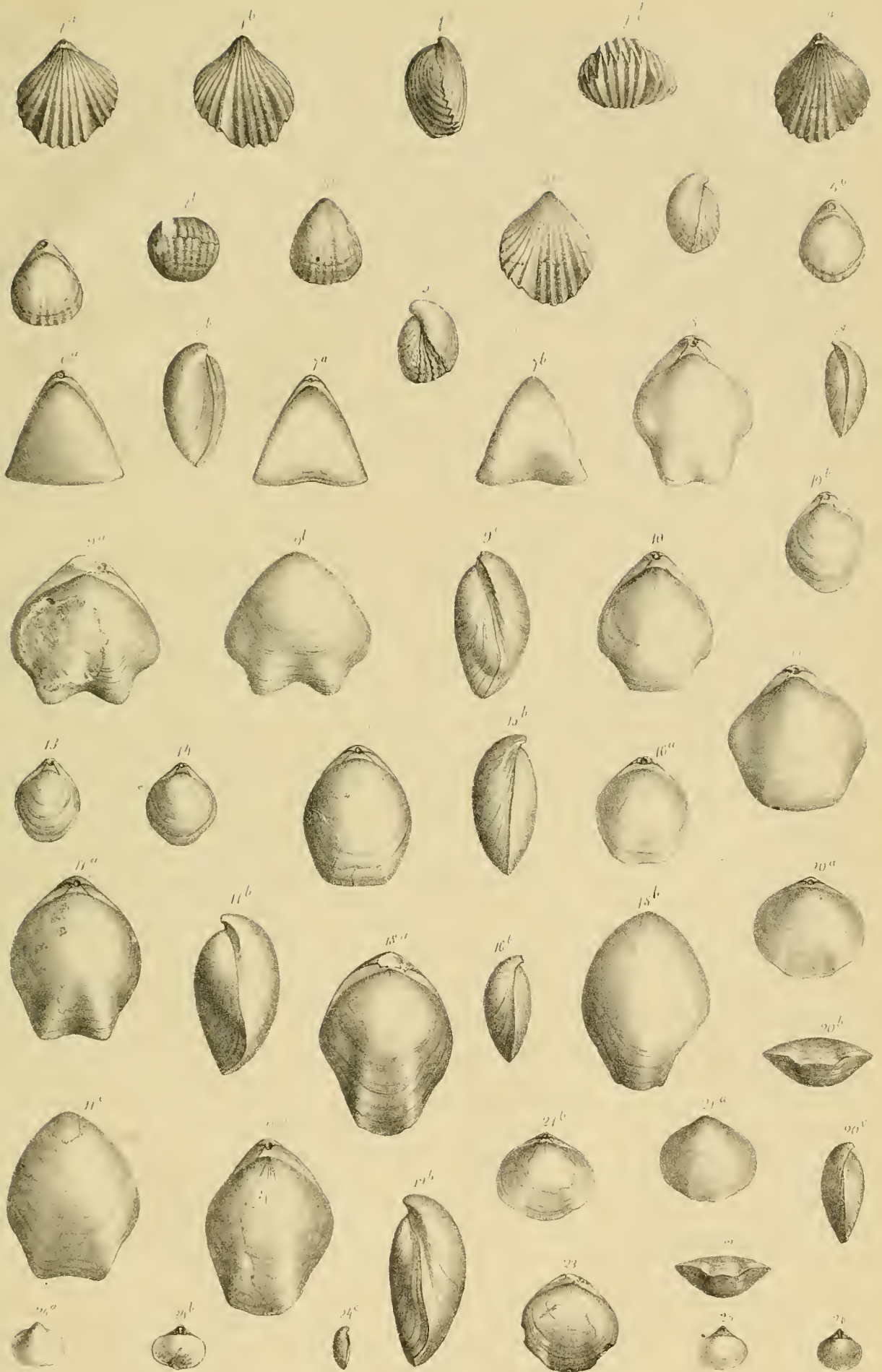
TAVOLA IV.

Fig. 1*a*, *b*, *c*, *d*; 2*a*, *b*. *Rhynchonella Zugmayeri* Gemm. (M. San Giuliano, parte sup.).
» 3*a*, *b*. *c*.; 4*a*. *b*; 5. *Terebratula Rotzoana* Schaur. , var. *plicata*, Tausch (M. S. Giuliano, parte sup.).
» 6*a*, *b*; 7*a*, *b*. *Waldheimia securiformis* Gemm., var. *pomatoides* Di-Stef. (M. San Giuliano, parte inf.).
» 8; 9*a*, *b*, *c*; 10, 11 » *quadrifida* Lmk. sp. , var. *lilybœa* Di-Stef. (M. San Giuliano, parte sup.).
» 12*a*, *b*; 13, 14 » *Darwini* Deslongc. (M. S. Giuliano parte sup.).
» 15*a*, *b*; 16*a* *b*. » sp. ind. aff. *W*. *subnumismalis* Davids. (M. San Giuliano, parte inf.).
» 17*a*, *b*, *c*; 18*a*, *b*; 19*a*, *b*. » *Verneuili* Deslongc. var. (M. S. Giuliano, parte sup.).
» 20*a*, *b*, *c*; 21*a*, *b*; 22 23. » *Rothpletzi* Di-Stef. (M. San Giuliano, parte inf.)
» 24*a*. *b*, *c*; 25*a*, *b*, *Kingena Capellinii* Di-Stef. (M. San Giuliano, parte sup.).

G. Tambuscio dis.

Lit. G. Huber.

G. Tamburini dis. Lit. G. Huber.

E. Tambuscio dis.

Lit. G. Huber

Sulle curve funicolari

NOTA I^a

del prof. G. PENNACCHIETTI.

Stabilite sotto diverse forme le equazioni differenziali dell'equilibrio d'un filo flessibile e inestensibile, dimostro sulle curve funicolari alcuni teoremi, che hanno analogia con note proprietà relative al moto d'un punto.

§ I.

Sieno x, y, z le coordinate, rispetto a un sistema di tre assi ortogonali, dell'estremità variabile dell'arco s d'un filo flessibile e nestensibile. Sieno T, u, v, w la tensione e le sue componenti, nel punto di coordinate x, y, z; e denotiamo con X, Y, Z le componenti della forza riferita all'unità di lunghezza del filo stesso. Le equazioni dell'equilibrio saranno:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{u}{T}, & \frac{du}{ds} &= -X, \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{v}{T}, & \frac{dv}{ds} &= -Y, \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{w}{T}, & \frac{dw}{ds} &= -Z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Questo sistema, essendo:

$$T = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

ha la forma normale.

Per trasformare facilmente il sistema (1) dalle coordinate ortogonali x, y, z a un sistema qualunque di coordinate curvilinee, poniamo:

$$\int \frac{ds}{T} = s_1 .$$

Al sistema (1) si può allora sostituire il seguente:

$$\frac{d^2x}{ds_1^2} = - XT, \quad \frac{d^2y}{ds_1^2} = - YT, \quad \frac{d^2z}{ds_1^2} = - ZT. \tag{2}$$

Se il filo è obbligato a rimanere sopra una superficie, la cui equazione sia:

$$f(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

alle equazioni (2) dovranno essere sostituite le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds_1^2} &= - XT + \lambda \frac{\partial f}{dx}, \\ \frac{d^2y}{ds_1^2} &= - YT + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{ds_1^2} &= - ZT + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

nelle quali λ è una quantità da eliminarsi.

Prendiamo ora un sistema qualunque di coordinate curvilinee nello spazio o sopra la superficie. Poniamo:

$$\frac{dq_k}{ds_1} = p_k, \tag{5}$$

ossia:

$$T \frac{dq_k}{ds} = p_k, \tag{6}$$

sicchè potremo esprimere T^2 mediante una funzione razionale in-

tera omogenea di secondo grado rispetto alle p_k con coefficienti funzioni delle q_k. Poniamo inoltre per brevità:

$$T' = \frac{1}{2} T', \tag{7}$$

come pure:

$$P_k = X \frac{\partial x}{\partial q_k} + Y \frac{\partial y}{\partial q_k} + Z \frac{\partial z}{\partial q_k} \,.$$

Le equazioni dell'equilibrio saranno, oltre le (5), le seguenti:

$$\frac{d}{ds_1} \frac{\partial T''}{\partial p_k} - \frac{\partial T'}{\partial q_k} = - T P_k \,,$$

ossia saranno, oltre le (6), le seguenti:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{\partial T}{\partial p_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - P_k \,. \tag{8}$$

§ II.

Il metodo che tiene il Del Grosso (*) per far dipendere la integrazione delle equazioni del filo dalla integrazione d' un sistema canonico, è il seguente. Si osservi anzitutto che, quando esiste una funzione potenziale U non contenente esplicitamente l'arco s, il problema ammette l' integrale:

$$T + U = k \,, \tag{1}$$

essendo k una costante arbitraria, e che si ha perciò:

$$- XT = \frac{\partial V}{\partial x} \,, \qquad - YT = \frac{\partial V}{\partial y} \,, \qquad - ZT = \frac{\partial V}{\partial z} \,, \tag{2}$$

(*) Nota sull'equazioni differenziali, che si presentano nei problemi di Meccanica, Giornale di Matematiche pubblicato per cura del prof. G. Battaglini, vol. IV, 1866.

essendo :

$$V = \frac{1}{2}(U - k)^2 .$$

Si ponga quindi :

$$x' = \frac{dx}{ds_1}, \quad y' = \frac{dy}{ds_1}, \quad z' = \frac{dz}{ds_1},$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2), \qquad H_1 = T_1 - V.$$

Sarà T_1 una funzione omogenea di secondo grado rispetto alle quantità $\frac{dq_k}{ds_1}$ (che denoteremo brevemente con q'_k) con coefficienti funzioni note delle variabili q_k. Si ponga inoltre :

$$\frac{\partial T_1}{\partial q'_k} = p_k ,$$

e si esprimano quindi T_1, H_1 per mezzo delle variabili q_k, p_k. T_1 si trasformerà in una funzione omogenea di secondo grado rispetto alle p_k con coefficienti funzioni di q_k. Se nei sistemi (§ I, 2, 4) si sostituiscono invece di $-XT$, $-YT$, $-ZT$ le espressioni date dalle (2), evidentemente questi sistemi potranno ridursi alla forma :

$$\frac{dq_k}{ds_1} = \frac{\partial H_1}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{ds_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_k} . \tag{3}$$

Ricordando poi che, per le posizioni fatte, la funzione caratteristica H_1 contiene necessariamente la costante k dell' integrale (1) del problema, e supposto che si sappia trovare una soluzione completa dell' equazione differenziale parziale corrispondente al sistema (3), sarà facile dedurre da questo sistema le equazioni integrali del problema dell' equilibrio contenenti, oltre la costante k, solamente altre tre o cinque costanti arbitrarie distinte, secondochè è o no data la condizione che il filo sia obbligato a rimanere sopra una superficie assegnata.

Nel seguente paragrafo vedremo come sia possibile sostituire ai sistemi (§ I, 6, 8) delle equazioni dell'equilibrio un sistema canonico equivalente, senza cambiamento della variabile indipendente s, e nel quale la funzione caratteristica sia $T + U$, e non contenga quindi la costante k. Il metodo, che esporremo, è anzi applicabile altresì quando si supponga che il problema non ammetta l'integrale (1), purchè esista una funzione potenziale contenente esplicitamente l'arco.

§ III.

Per ridurre il sistema (§ I, 6, 8) alla forma canonica di Hamilton, si sostituiscano alle variabili p_k nuove variabili r_k definite dalle relazioni:

$$T \frac{\partial T}{\partial p_k} = r_k . \tag{1}$$

Si ha per la posizione (§ I, 7):

$$T'' = \sum \frac{\partial T''}{\partial p_k} p_k - T' ,$$

onde:

$$dT' = \Sigma\, r_k dp_k + \Sigma\, p_k dr_k - \sum \frac{\partial T'}{\partial q_k} dq_k - \sum \frac{\partial T''}{\partial p_k} dp_k ,$$

ossia:

$$dT' = \Sigma\, p_k dr_k - \sum \frac{\partial T'}{\partial q_k} dq_k .$$

Esprimiamo T, T' per mezzo delle q_k, r_k. Racchiudendo entro parentesi le derivate parziali prese in quest'ipotesi, si ha:

$$dT' = \sum \left(\frac{\partial T''}{\partial r_k}\right) dr_k + \sum \left(\frac{\partial T''}{\partial q_k}\right) dq_k .$$

Confrontando le due espressioni di dT' e avendo presente la (§ I, 7), si ha:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r_k}\right) = \frac{p_k}{T}, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial T'}{\partial q_k}.$$

In virtù di queste equazioni e della (1) il sistema (§ I, 6, 8) diviene:

$$\frac{dq_k}{ds} = \frac{\partial T'}{\partial r_k}, \qquad \frac{dr_k}{ds} = -\frac{\partial T'}{\partial q_k} - P_k,$$

dove s' intende che T' sia espresso mediante le q_k, p_k. Se U è la funzione potenziale, non contenente esplicitamente le p_k e perciò nemmeno le r_k, e, se si pone:

$$T' + U = H,$$

il sistema precedente assume la forma canonica:

$$\frac{dq_k}{ds} = \frac{\partial H}{\partial r_k}, \qquad \frac{dr_k}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \tag{2}$$

Se il filo è libero, prendendo x, y, z per variabili q_1, q_2, q_3, l' equazione differenziale parziale corrispondente al sistema canonico (2) è:

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} + U = k, \tag{3}$$

essendo:

$$r_1 = \frac{\partial S}{\partial x}, \qquad r_2 = \frac{\partial S}{\partial y}, \qquad r_3 = \frac{\partial S}{\partial z}.$$

Se il filo è obbligato a rimanere sopra la superficie (§ I, 3),

l' equazione differenziale parziale corrispondente al sistema canonico è:

$$\sqrt{\frac{Gr_1^2 - 2Fr_1r_2 + Er_2^2}{EG - F^2}} + U = k\,, \tag{4}$$

dove:

$$r_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}\,, \qquad r_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}\,.$$

§ IV.

Supponiamo che il filo sia obbligato a rimanere sopra la superficie (§ I, 3), e che il quadrato dell' elemento lineare della superficie abbia la forma:

$$ds^2 = Edq_1^2 + 2Fdq_1dq_2 + Gdq_2^2\,.$$

Dalle (§ I, 6) si avrà:

$$T = \sqrt{Ep_1^2 + 2Fp_1p_2 + Gp_2^2}\,. \tag{1}$$

L'equazioni (§ I, 8) sviluppate divengono:

$$\left.\begin{aligned}(EG - F^2)\,T\,\frac{dp_1}{ds} &= (-\,GP_1 + FP_2)\,T + \pi_1\,,\\ (EG - F^2)\,T\,\frac{dp_2}{ds} &= (\;\;FP_1 - EP_2)\,T + \pi_2\,,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dove:

$$\pi_1 = \left(F\frac{\partial F}{\partial q_1} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial q_2} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial q_1}\right)p_1^2 + \left(F\frac{\partial G}{\partial q_1} - G\frac{\partial E}{\partial q_2}\right)p_1p_2$$

$$+\left(\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial q_2} - G\frac{\partial F}{\partial q_2} + \frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial q_1}\right)p_2^2\,, \tag{3}$$

$$\pi_2 = \left(\frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial q_1} - E \frac{\partial F}{\partial q_1} + \frac{1}{2} E \frac{\partial E}{\partial q_2}\right) p_1^2 + \left(F \frac{\partial E}{\partial q_2} - E \frac{\partial G}{\partial q_1}\right) p_1 p_2$$

$$+ \left(F \frac{\partial F}{\partial q_2} - \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial q_1} - \frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial q_2}\right) p_2^2 . \tag{4}$$

Le equazioni (2), insieme colle equazioni:

$$\frac{dq_1}{ds} = \frac{p_1}{T}, \qquad \frac{dq_2}{ds} = \frac{p_2}{T}, \tag{5}$$

sono le equazioni dell'equilibrio nella forma (§ I, 6, 8), e costituiscono un sistema normale.

§ V.

Sia:

$$f(x, y, z, u, v, w) = h,$$

essendo h una costante arbitraria, un integrale, non contenente esplicitamente l'arco, delle equazioni (§ I, 1). Si dovrà avere identicamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w - \frac{\partial f}{\partial u} XT - \frac{\partial f}{\partial v} YT - \frac{\partial f}{\partial w} ZT = 0 .$$

Di qui si conclude quanto segue: *Sieno* $-XV$, $-YV$, $-ZV$, *dove* $V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$, *le componenti della forza sollecitante, riferita all'unità di massa, nel moto d'un punto libero. Sieno* X, Y, Z *le componenti della forza, nell'equilibrio d'un filo flessibile e inestensibile, in modo che queste quantità* X, Y, Z *abbiano nel primo problema, rispetto a* x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, t *la stessa espressione analitica che, nel secondo problema, hanno rispetto a* x, y, z, u, v,

w, s. *Gl' integrali, non contenenti esplicitamente il tempo, del primo problema, e gl' integrali, non contenenti esplicitamente l'arco, del secondo problema, si trasformano gli uni negli altri, scambiando fra loro le componenti della velocità e le componenti della tensione.* In particolare: *Se* X, Y, Z *non contengono esplicitamente la variabile indipendente, e se inoltre non si fa alcuna determinazione sulle costanti arbitrarie che appariscono negli integrali non contenenti esplicitamente la variabile indipendente, le equazioni della traiettoria, nel primo problema, saranno anche le equazioni della curva d' equilibrio, nel secondo. Se per un dato valore di* x, *i valori dati di* y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, *nel primo problema, sono rispettivamente eguali, ai valori dati di* y, z, u, v, w, *nel secondo problema, la traiettoria e la curva funicolare saranno un' identica curva.*

Similmente sia:

$$f(q_1, q_2, p_1, p_2) = h$$

un integrale, non contenente esplicitamente l' arco, del sistema di equazioni (§ IV, 2, 5). Si dovrà avere identicamente:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} p_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} p_2 + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{(-GP_1 + FP_2)T + \pi_1}{EG - F^2} + \frac{\partial f}{\partial p_2} \frac{(FP_1 - EP_2)T + \pi_2}{EG - F^2} = 0.$$

Se ne deduce facilmente quanto segue. *Sieno*:

$$-P_1 V, \qquad -P_2 V,$$

dove:

$$V = \sqrt{E\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + 2F\frac{dq_1}{dt}\frac{dq_2}{dt} + G\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2},$$

le componenti, secondo le linee coordinate, della forza sollecitante nel moto d' un punto obbligato a rimanere sopra una superficie. Sieno P_1, P_2 *le componenti della forza nell' equilibrio d' un filo flessibile e inestensibile sopra la stessa superficie, in modo che queste quantità* P_1, P_2 *ab-*

biano, nel primo problema, rispetto a q_1, q_2, $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dq_2}{dt}$, t *la stessa espressione analitica che hanno, nel secondo, rispetto a* q_1, q_2, p_1, p_2, s. *Gl' integrali, non contenenti esplicitamente il tempo, del primo problema, e gl'integrali, non contenenti esplicitamente l'arco, del secondo problema, si trasformano, gli uni negli altri, scambiando* $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dq_2}{dt}$ *rispettivamente con* p_1, p_2. In particolare, *se* P_1, P_2 *non contengono esplicitamente la variabile indipendente, e si lasciano completamente arbitrarie le costanti che devono figurare negl' integrali che non contengono esplicitamente la variabile indipendente, l' equazione della traiettoria nel primo problema è anche l'equazione della curva funicolare nel secondo.*

§ VI.

Determiniamo in qual caso, nell' ipotesi che X, Y, Z sieno funzioni di x, y, z soltanto, l' equazione :

$$Au + Bv + Cw + D = h, \tag{1}$$

ove A, B, C, D sono funzioni di x, y, z, sia integrale delle equazioni (§ I, 1). Affinchè la (1) sia integrale di queste equazioni, si dovrà avere identicamente :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}u + \frac{\partial A}{\partial y}v + \frac{\partial A}{\partial z}w\right)u + \left(\frac{\partial B}{\partial x}u + \frac{\partial B}{\partial y}v + \frac{\partial B}{\partial z}w\right)v + \left(\frac{\partial C}{\partial x}u + \frac{\partial C}{\partial y}v + \frac{\partial C}{\partial z}w\right)w$$

$$+ \frac{\partial D}{\partial x}u + \frac{\partial D}{\partial y}v + \frac{\partial D}{\partial z}w - (AX + BY + CZ)\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = 0. \tag{2}$$

È facile vedere che dev' essere :

$$AX + BY + CZ = 0, \tag{3}$$

e che quindi l' equazione precedente si scinde in quelle stesse equa-

zioni che devono essere verificate, affinchè le equazioni differenziali:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

del moto d'un punto libero ammettano un integrale della forma:

$$A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} + D = h.$$

Perciò è:

$$A = l + ry - qz, \qquad B = m + pz - rx, \qquad C = n + qx - py,$$

essendo l, m, n, p, q, r costanti arbitrarie.

L'equazione (1) dovrà quindi ridursi alla forma:

$$lu + mv + nw + p(zv - yw) + q(xw - zu) + r(yu - xv) = h, \tag{4}$$

ossia:

$$T\left[l\frac{dx}{ds} + m\frac{dy}{ds} + n\frac{dz}{ds} + p\left(z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt}\right) + q\left(x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right) + r\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)\right] = h. \tag{5}$$

Quest'equazione è il più generale integrale della forma (1), nell'ipotesi che le forze sieno funzioni delle sole coordinate; però esso conviene al problema, anche se le forze dipendono da u, v, w, s, purchè X, Y, Z, considerate come funzioni di x, y, z, u, v, w, s, soddisfino identicamente, per valori arbitrari di queste quantità, all'equazione:

$$(l + ry - qz)X + (m + pz - rx)Y + (n + qx - py)Z = 0. \tag{6}$$

Si ha così questo teorema: (*) *Nell' equilibrio d' un filo flessibile e inestensibile, se le linee d' azione della forza appartengono ad un complesso lineare, il momento della tensione rispetto al complesso è costante in tutti i punti del filo.*

Potevamo dedurre questa proposizione immediatamente dal teorema analogo del Cerruti, fondandoci sull' osservazione che abbiamo fatta nel paragrafo precedente.

Volendo far uso della forma canonica (§ III, 2), (**) si prendano x, y, z per variabili q_1, q_2, q_3. L'equazione (1) diviene allora:

$$Ar_1 + Br_2 + Cr_3 + D = h\,. \tag{7}$$

Si ponga:

$$(K, H) = \sum_{k=1}^{k=3} \left(\frac{\partial K}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial r_k} - \frac{\partial K}{\partial r_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right),$$

dove:

$$q_1 = x\,, \quad q_2 = y\,, \quad q_3 = z\,.$$

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè l' equazione (7) sia integrale d' un problema, è che si abbia identicamente:

$$(K, H) = 0\,.$$

Sviluppando quest' equazione, si trova che essa si scinde nelle stesse equazioni in cui si scinde la (2).

Poniamo per brevità:

$$\frac{dx}{ds} = a\,, \quad \frac{dy}{ds} = b\,, \quad \frac{dz}{ds} = c\,,$$

$$\tau = Aa + Bb + Cc\,.$$

(*) Cfr. Cerruti, *Intorno ad una generalizzazione di alcuni teoremi di meccanica*, Collectanea mathematica in mem. D. Chelini, 1881.

(**) Cfr. E. Padova, *Sugli integrali comuni a più problemi di Dinamica*, Atti del R. Ist. ven. Vol. I, serie VI, 1883.

Si avrà da (5):

$$T = \frac{h}{\tau} \cdot$$

Quindi le equazioni dell'equilibrio offrono:

$$X = -h \frac{d}{ds} \frac{a}{\tau}, \quad Y = -h \frac{d}{ds} \frac{b}{\tau}, \quad Z = -h \frac{d}{ds} \frac{c}{\tau} \cdot \tag{8}$$

Se i secondi membri delle (8) si sostituiscono nella (3) invece di X, Y, Z, si trova un'identità, sicchè, se sono dati il complesso e la curva, si possono determinare X, Y, Z in funzione dell'arco. Dunque: *Una curva qualunque può essere configurazione d' equilibrio d' un filo del quale ciascun punto sia sollecitato da una forza, la cui linea d'azione varii in un complesso lineare assegnato ad arbitrio.*

Catania 20 novembre 1891.

Contributo sull'azione della tubercolina nei tisici

(con 2 autopsie)

pel Dottor ANGELO PETRONE

Professore ordinario di Anatomia patologica a Catania.

Quando si può prendere la parola in argomenti simili e contribuire anche in piccola parte alla loro illustrazione, si è sempre adempiuto un dovere; e la questione della tubercolina include il sollievo dell'umanità sofferente.

Oggi, che non è più lecito discutere sull'origine batterica dei morbi infettivi, dopo che un'immensa mole di studî positivi l'ha stabilito in modo perentorio, è giustificata la febbrile attività di trovare i mezzi per evitare l'invasione di questi invisibili ospiti, toglierne le condizioni favorevoli di attecchimento, facendo calcolo del loro modo di vivere, e finalmente distruggerli una volta che hanno invaso l'organismo eludendo tutte le norme dell'igiene.

L'essere preservati dai batterî patogeni è certamente il primo desiderato, perchè si evita il morbo non solo come presenza e moltiplicazione di questi esseri vivi, ma anche come prodotti deleterî del loro ricambio materiale, da cui più spesso vengono i danni maggiori ed irreparabili.

Disgraziatamente non si conosce ancora tutta la biologia di questi parassiti, i quali d'altronde per la loro piccolezza insidiano nel modo più occulto il nostro organismo, e da ciò la terribile frequenza dei morbi infettivi con tutto il progresso; sebbene, quando ci si mette in guardia con le dovute norme, oggi facilmente si arrestano o si limitano spaventevoli epidemie ed endemie, come colera, febbre gialla, peste, tifo, ecc., facendo attenzione al veicolo principale e più comune che è l'acqua, o isolando le località colpite e via dicendo.

Ad infezione già avvenuta corre l' obbligo di distruggere la causa morbigena, cioè il batterio specifico: e se per alcune infezioni ciò si era ottenuto casualmente ed in modo puramente empirico, come nella malaria e nella sifilide, oggi dietro le nuove conquiste della scienza si cerca di risolvere il grande problema curativo delle infezioni sia con mezzi direttamente microbicidi, sia coi prodotti di ricambio degli stessi batterî, che poco per volta modificherebbero gli umori dell' organismo infettato da rendersi finalmente refrattarii all' attecchimento del microparassita: su quest' ultimo principio si fonda la teoria dei vaccini, almeno la più importante, senza entrare (che non è il nostro compito attuale), sul modo di prepararli, se cioè devono attraversare un altro animale refrattario, ecc.

E per ottenere il primo risultato si impiegano i mezzi già sanzionati nel laboratorio con effetti portentosi: quindi la medicatura Lister per la chirurgia; l' acido fenico, il sublimato, ecc. nella pustola maligna; il sublimato corrosivo nel colera, e poi il calomelano nel tifo, anzi perfino la difterite, anche nei casi disperati, si dice arrestata dalle frizioni mercuriali secondo i dettati di Rauchfuss, confermati ultimamente da Smakovski. Sventuratamente si tratta di morbi gravi e sovente arrivati ad un punto, che il rimedio riesce frustraneo per la dose avanzata del veleno microbico, e da ciò l' ignoranza mette i suoi argomenti pel discredito. Comprendo, che forse non si avrà tutta la specificità di azione che del mercurio si ha nel laboratorio e clinicamente nella sifilide; ma sono convinto, che il rimedio tante volte riesce inutile ed anche nocivo per lo stadio in cui si trova il morbo, come tante volte succede nella stessa sifilide.

Per ottenere il secondo risultato, cioè i vaccini, che possono essere mezzi preventivi e curativi, ferve oggi nel mondo scientifico il lavoro sperimentale, dopo che la fortuna arrise a Ienner, dopo che il genio di Pasteur mise il vaccino pel carbonchio, per la rabbia ecc.; e dopo che Koch comunicò la sua scoverta della tubercolina: quindi lavori speciali sul difterismo, sul tetano, ed anche sulla pulmonite crupale.

Ma le scoverte sono sempre le più combattute, perchè spostano la comodità dei retrivi. E pel nostro argomento le 2 più importanti scoverte di Koch, cioè quella sulla causa della tubercolosi (24 Marzo 1882), e l'altra sulla materia curativa di questo morbo (14 Novembre 1890) sono state oggetto di vive opposizioni: ed oggi che nessuno più discute il valore della scoverta etiologica della tubercolosi, vi è ancora grande discordia sul valore del rimedio trovato da Koch contro la tubercolosi.

In tanta disparità di risultati e di opinioni, che finalmente porterà i suoi benefici effetti, noi vediamo sempre risaltare la figura di Roberto Koch, il quale con perizia somma e coscienza profonda, che ognuno riconosce in questo celebre scienziato, ha condotto a termine anche questi suoi studi. La sua scoverta sulla causa della tubercolosi prima fu anche molto oppugnata, ma oggi non vi sono che pochi ciechi per non veder tanta luce. Vogliamo dire, che un ricercatore come Koch, il quale dopo un lungo lavoro pubblica la sua nota del 14 Novembre, ha tutto il dritto alla nostra fede: la sua ultima scoverta deve avere perciò un inconcusso valore. Portata la questione sull'uomo per necessità dovevano venire le contradizioni, quando si riflette alla varietà degli ammalati, alla differente fase del morbo ed al grande numero dei medici sperimentatori. Senza dubbio la sana ed illuminata Clinica deve illustrare, modificare e meglio concretare l'applicazione di questo grande trovato: ma non crediamo giusto, che verso un apostolato così fervido si sia anche da persone autorevoli messo *a priori* il dubbio, anzi qualcuno si è opposto all'applicazione del rimedio, mentre soltanto la scuola dei fatti vale ai giorni di oggi, perchè l'idea non li partorisce, ma ne dipende: e quindi bisognava se non altro aspettare prima i risultati clinici.

Esaminiamo ora brevemente la storia dei fatti. Koch pubblica anche prima del tempo da lui voluto la sua scoverta della tubercolina, cioè, di un estratto glicerinoso del materiale di cultura in cui vissero i bacilli della tubercolosi. I risultati delle sue esperienze, che egli pubblica anche nei suoi particolari, gli danno il

dritto a conchiudere, che la tubercolina dà alle cavie l'immunità per la tubercolosi ed arresta il decorso della malattia nelle cavie che già ne sono colpite. Quindi egli esprime la speranza, che la tubercolosi dell'uomo e particolarmente quella dei polmoni deve essere guaribile: e bisogna por mente a quest'ultima conclusione, che risalta di tanta modestia per quanto grande è la scoverta: egli non dice che la tisi tubercolare debba guarire in tutti i suoi stadii, ma che la tubercolosi deve poter guarire.

Già la notizia di questi studî, trasparendo dalla conferenza di Koch sulla batteriologia fatta al Congresso internazionale di medicina a Berlino, toccando l'interesse di tanti sofferenti, vicino ad un nome tanto mallevadore dei suoi trovati, aveva commosso il mondo intero, anche prima della nota del 14 Novembre. Come era naturale ognuno, potendolo, si mise alla prova principalmente per la insistenza dei poveri ammalati, e tutti ricordano episodii raccapriccianti di sofferenti quasi moribondi, che si facevano trasportare dalla locomotiva a Berlino. Si cominciò col disordine, si continuò coll'esagerazione e si è finito col discredito. Ma il metodo non sempre fu praticato con tutte le norme, non si fu severi nelle dosi da applicarsi all'uomo, nè sempre si fece giusto calcolo del tempo di continuazione della cura, degli stadii diversi della tubercolosi, della natura e topografia varia degli organi affetti, della resistenza speciale dei singoli malati; e quindi i risultati ed opinioni contrarie anche di scienziati eminenti. A me però ha fatto impressione, che finora non hanno dato un giudizio esplicito gli uomini più competenti, come Pasteur, Lister: solo Virchow ha esposto varii reperti anatomici, segnalando fatti funesti probabilmente dipendenti dall'iniezione di tubercolina, e richiamando l'attenzione perchè si fosse cauti nella sua amministrazione. Ho nominato soltanto Virchow, come il maestro più autorevole e vecchio in Anatomia patologica: autopsie simili sono state fatte da tanti altri, ed in generale la conclusione è stata poco favorevole alla iniezione della linfa. Ma si comprende facilmente, che non si poteva conchiudere in modo diverso trattandosi di individui morti, non guariti, e poi influenzati

dal parere di Virchow: forse anche le modificazioni in meglio erano sopraffatte dai profondi guasti, che più o meno si sono incolpati alla tubercolina.

Ora io vi esporrò il risultato di 2 autopsie di tisici trattati con la tubercolina, affinchè potessi col giusto apprezzamento dei fatti contribuire al grave argomento.

1.ª AUTOPSIA.

L'individuo con tubercolosi pulmonale al 3° stadio, cioè distruttivo, era stato accolto e trattato nella Clinica medica (Tomaselli) con 3 iniezioni di tubercolina, la prima di $^1/_2$ milligrammo, la seconda di uno e la terza di uno e mezzo, quindi in tutto 3 milligrammi. Il giorno dopo l'ultima iniezione, non essendo mai migliorato anzi il male si aggravava semprepiù, l'ammalato volle uscire dall'ospedale e morì nella propria casa 15 giorni dopo l'ultima iniezione. L'autopsia per la mia insistenza e per la solerzia del nostro assistente Dottor Condorelli fu praticata di sera al Camposanto. I pezzi portati al nostro Istituto mi hanno fatto giudicare " Tisi tubercolare con grosse caverne in tutti due gli apici, prevalentemente nel destro — Estesa disseminazione tubercolare nel resto dei polmoni sotto le apparenze differenti di granulazioni e nodi tubercolari a stadii diversi — Pulmonite crupale floscia e corrispondente pleurite secca al lobo inferiore destro — Tubercolosi miliare acuta nei soli reni: (questa lesione si è esclusa nel fegato anche con l'esame microscopico) — Le glandule linfatiche peribronchiali di destra sono tumefatte notevolmente per infiltramento midollare recente.

2.ª AUTOPSIA.

L'individuo era accolto nella Clinica medica propedeutica (Feletti), e decesso nella stessa dopo 19 iniezioni di tubercolina, la

prima di 1/4 di milligrammo e poi aumentando gradatamente da arrivare alla dose massima di 2 centigrammi, impiegando una quantità complessiva di milligrammi 165 3/4. Le iniezioni furono sospese pel peggioramento delle condizioni generali e locali, peggioramento che progressivamente aumentò sino alla morte, avvenuta 42 giorni dopo l'ultima iniezione praticata. Il cadavere venne al nostro Istituto con la diagnosi clinica " Tubercolosi pulmonare e laringea. „

L'autopsia è stata fatta pubblicamente nella nostra scuola il 14 Maggio, ed abbiamo trovato. " Tisi tubercolare dei polmoni con caverne vecchie agli apici, circondate da esteso induramento ardesiaco in cui risalta un colorito roseo non ordinario. Disseminazione confluente nel resto dei polmoni con esteso rammollamento caseoso, avvenuto di recente anche nei focolai più piccoli: perforazione di 3 di questi nel sacco pleurico sinistro e pio-pneumo-torace—Laringite tubercolare in via di guarigione. —Nessuna alterazione rilevante negli altri organi, meno un certo grado di rigonfiamento torbido. „ A proposito delle condizioni anatomiche del laringe, omettiamo i particolari, che già si trovano descritti nel reperto anatomico: in succinto però facciamo risaltare, per conferma della natura del processo, il fatto clinico della tubercolosi della laringe e dei polmoni, le estese alterazioni anatomiche precedenti che abbiamo potuto indurre dai postumi di riparazione in parte alla fase cicatriziale, mentre nei punti ancora ulcerati, sebbene messi quasi livello della mucosa vicina, vi è ancora un intonaco caseoso; ed infine anche la località prediletta per la tubercolosi, cioè, la faccia inferiore ed i margini laterali dell' epiglottide e la parete anteriore del laringe.

L'esame microscopico relativo all'esistenza dei bacilli tubercolosi l'ho fatto a preferenza nel 2.º caso, perchè in questo soltanto si può far calcolo di un'azione vera e prolungata della tubercolina; anzi il notevole tempo trascorso dall' ultima iniezione mette, secondo me, la condizione favorevole per la possibile lenta modificazione del bacillo, mentre nascono dei dubbii nei casi in cui manca il tempo utile per simili risultati.

Il sangue non ha mostrato traccia di bacilli tubercolari: l'esame poi principalmente delle granulazioni più recenti, raramente ha presentato il bacillo specifico, il quale mi è sembrato: 1.º essere un poco meno colorato che nelle condizioni ordinarie: 2.º più esile, sebbene i più corti e quelli incurvati mostrano la spessezza ordinaria: 3.º talora trasformato in una serie di grossi granuli del protoplasma, disposti a rosario, debolmente ma evidentemente colorati nel modo specifico. Si osserva poi una quantità di granuli liberi nel tessuto, purchè si trovi in uno stato infiammatorio, perfino nelle pareti alveolari ed anche in quello essudato gelatiniforme omogeneo che talora tapezza le pareti stesse. Queste apparenze, colorate perfettamente nel modo specifico del bacillo della tubercolosi, sono simili soltanto un poco più grosse dei granuli disposti a catena di 3, 4 a 5 nell'interno delle membrane bacillari: somigliano a cocchi isolati, talora riuniti a due, tal'altra aggruppati in numero maggiore: alcuni mostrano la prevalenza di uno dei diametri, e quindi appariscono come corti bacilli. (Di questi fatti troveranno la dimostrazione nei preparati esposti.) Io pel momento non mi fido giudicare di simili apparenze: credo che sieno modificazioni importanti del batterio specifico, e con molta probabilità hanno dipeso dalla tubercolina: se queste apparenze di cocchi sieno spore tubercolari, simili a quelle che io stesso descrissi pel primo nell'essudato della leptomeningite tubercolare nel 1884, ovvero le spore bacillari di Schrön diventate libere; e se le apparenze di bacilli costituiti da una catena di torule sieno l'espressione del bacillo tubercolare sporifero anche da me descritto perfino con figure nel succennato lavoro, ovvero il bacillo tubercolare giovine secondo Schrön, ovvero un'apparenza artificiale, come quella indotta principalmente dal iodo, secondo C. Fraenckel ed altri, abbisognano ancora studii severi per decidere; ed io mi riservo di studiare più ampiamente questo argomento, su tutti i pezzi conservati di questa autopsia e tratterò con lo stesso metodo quanti altri casi mi sarà possibile di studiare di tubercolotici non trattati con la tubercolina; e devo dichiarare che in questi studii mi son servito a preferenza dell'acido acetico glaciale in so-

stanza come decolorante invece di altri acidi: modifica che notai nel mio lavoro del 1884, e che mi ha corrisposto sempre e meglio degli altri. Pel momento però devo dire, che quell' apparenza di cocchi più che ad un fatto regressivo di frazionamento, di involuzione secondo Fraentzel ed altri, riporterei ad un' evoluzione progressiva, sporigena, tanto le apparenze sono precise, la colorazione perfetta ed il graduato passaggio in corti bacilli: e che la disposizione speciale a rosario del protoplasma del bacillo in questo caso non si può incolpare al iodo, quindi non è un prodotto artificiale: sarebbe di un estremo interesse poter confermare l' opinione mia e di Schrön in proposito, che cioè sieno bacilli nel loro pieno vigore prolifico, perchè allora la tubercolina sarebbe condannata. Su questa quistione fina, intima devo sospendere il giudizio il quale dovrà essere confermato, modificato o corretto da studi ulteriori. Pel momento continuerò le considerazioni sull' argomento in parola, indipendentemente dai dubbii suesposti.

Dalla prima autopsia possiamo dedurre poco o niente sugli effetti della tubercolina: è troppo tenue la quantità iniettata, per incolpare la linfa di effetti dannosi, come la pulmonite floscia, e di non aver arrestato l' ulteriore progresso del morbo, massime nelle sue manifestazioni lontane, metastatiche, come la tubercolosi miliare acuta dei reni. E se la tubercolina in primo tempo non distrugge il bacillo e la sua virulenza, tanto da poter indurre l'allargamento e moltiplicazione di focolai circoscritti preesistenti, per avere il rammollamento reso più facile la disseminazione e le metastasi, non si può dire ciò con asseveranza nel caso in parola per le ragioni suesposte: e poi manifestazioni simili si hanno non infrequentemente anche senza l'uso della tubercolina. Relativamente alla pneumonite, a noi non ha imposto l'apparenza speciale floscia, la quale, come è risaputo, si ha in generale negli individui deboli e nei vecchi a preferenza: il marasmo indotto dalla tisi tubercolare giustifica la scarsezza dell' essudato, mentre la mancanza del bacillo tubercolare, l' estensione lobare e la pleurite secca corrispondente al lobo infiammato, confermano la natura della pulmonite crupale: non vi

abbiamo trovato il diplococco di Fraenckel o altri equivalenti; ma si sa, che specialmente dopo un certo tempo lo pneumococco non si trova più: e dall' esame microscopico risulta che il processo datava da un tempo maggiore dell' ordinario, e che la risoluzione cominciava in modo lento, sebbene incompleto. L'infiltramento acuto delle glandule linfatiche peribronchiali a destra è in rapporto solo con la flogosi crupale, avendosi il riscontro in casi simili e mancando il bacillo tubercolare.

Dalla seconda autopsia abbiamo potuto trarre ammaestramenti più positivi per la questione in parola. Mentre nel 1.° caso le iniezioni di tubercolina furono così scarse da non essere sufficienti a produrre cambiamenti positivi, straordinarii nei noduli recenti, nel 2.° sono state praticate molte iniezioni, per un tempo lungo e la somma della tubercolina iniettata è stata considerevole, e quindi dobbiamo credere sufficiente per gli effetti speciali. L' iperemia delle località affette da induramento ardesiaco, oltre quella del resto dei polmoni, certamente è un fatto straordinario; come pure è straordinario il fatto, che in polmoni affetti da tisi tubercolare di data antica ed a decorso lento, sopraggiunge un rammollamento generale delle masse caseose, anche nei nidi tubercolari più recenti, sino a cagionare, essendo mancato il tempo utile per la pleurite adesiva, la perforazione del polmone nella pleura; è vero, che alterazioni simili troviamo nei polmoni presi da tisi florida, galoppante, ma allora il processo quasi mai ha una data antica e lunga. L' altro fatto straordinario è il miglioramento esteso, in varii punti con guarigione cicatriziale del processo tubercolare del laringe, in modo che l'apparenza ordinaria devastante dell' ulcerazione tubercolare, e che nel caso presente ha dovuto essere profonda a giudicare dalla riparazione cicatriziale, non più appare: un simile risultato non eravamo abituati ad ottenere con l'impiego di tutti i mezzi curativi finora conosciuti. Questi fatti straordinarii noi mettiamo sul conto dell' azione della tubercolina iniettata.

Io sono della opinione della maggioranza, la quale oggi ritiene che l' azione dalla tubercolina non sia necrotizzante pei prodotti

tubercolari: e davvero sarebbe inutile la poca e problematica necrosi cagionata dalla linfa, quando già l' infiammazione specifica per conto proprio vi è destinata, tanto da aversi più o meno prestamente la necrosi coseosa, costituente la seconda fase, che è la degenerativa regressiva nel tubercolo. E poi il fatto di tubercoli miliari e submiliari, già confermato in tanti reperti di individui trattati con la tubercolina va contro l'opinione necrotizzante della linfa: anzi conferma, per l' eruzione recentissima, che la linfa non ha azione diretta contro il bacillo, almeno nei primi tempi della sua azione; chi sa che invece non metta le condizioni favorevoli per la sua rapida prolificazione.

Seguiamo invece l' opinione, almeno sino ad oggi, che accorda alla linfa un'azione locale speciale sulle parti specificamente infiammate, per cui sarebbe alterato il campo vasale della località, diminuita la resistenza delle pareti vasali, in modo da succedere dilatazione e maggiore riempimento in sangue, e quindi trasudazione notevole di siero. Ciò è evidente ocularmente nelle affezioni tubercolari esterne e coi segni plessici ed acustici nelle interne appartenenti all' apparecchio respiratorio. E tutto questo è stato confermato dalle osservazioni necroscopiche, in cui ordinariamente si è trovata iperemia delle località affette di tubercolosi dietro l' azione della tubercolina, e nella nostra seconda osservazione colpisce l' aspetto roseo che risalta sulle parti affette da induramento ardesiaco, e la notevole iperemia del resto dei polmoni là ove sono granulazioni e nidi tubercolari di data recente, e crediamo che questo stato iperemico è minore ancora di quello che ha dovuto essere nel tempo delle iniezioni e nei primi giorni consecutivi. L' esame microscopico ha confermato la iperemia del parenchima pulmonale circostante alle formazioni tubercolari recenti, ed iperemia anche nelle parti già obsolescenti per induramento ardesiaco, ove è straordinario il fatto che parte del parenchima pulmonale già collabito mostra dilatazione degli alveoli per riempimento di siero e le pareti alveolari mostrano dilatazione dei capillari ed infiltramento leucocitico recente senza accenno a trasformazioni regressive.

È questa azione alterante della tubercolina, quasi come fanno le sostanze acri (Liebreich), indotta sulle pareti vasali più predisposte, già alterate, cioè sui vasi che circondano i focolai tubercolari, che deve essere la base dei cambiamenti importanti che si fanno nella località. Da una parte l'invasione di siero, che, grazie ai lavori di Buchner e di Stern, si ritiene che agisca poco per volta come microbicida, sebbene ciò dovrà essere confermato pel bacillo della tubercolosi; dall' altra, ed è un fatto innegabile, i focolai con necrosi caseosa dietro questa invasione sierosa si rammolliscono rapidamente, mettendosi la condizione favorevole per lo sfacelo: dall' altra infine i tessuti più vecchi, anche sclerosati, sono infestati ed animati da elementi attivi, indifferenti, per cui la possibilità ai processi limitanti, riparatori.

L'invasione sierosa dei prodotti flogistici tubercolari, già caduti in necrosi caseosa, e consecutivo rammollamento rapido per opera della tubercolina illustra la questione di genesi del rammollimento delle masse caseose nella tubercolosi: per conto mio da varii anni ho espressa l'opinione che non era quella specie di cozione che si ammetteva, nè il lento riassorbimento dell'acqua per cui la parte degenerata si precipitava ecc., invece ho dato peso all' invasione di siero dalle parti limitrofe, le quali iperemizzano ed infiammano sino alla suppurazione intorno a quella parte morta, che figura da corpo estraneo; e quella parte morta in via di sgregamento granulare per l'indole del processo è invasa passivamente dal siero e perciò rammollita: e se ciò non succede nella necrosi caseosa della gomma, io dicevo, ciò dipendere dall' impedita invasione di siero per la sclerosi circostante, che lentamente si fa intorno ai prodotti necrotici delle gomme a differenza che nei prodotti tubercolari: come anche è risaputo, che gomme le quali rapidamente assolvono il loro decorso, e sono le più esposte ai maltrattamenti traumatici, come le periostali esterne, appunto per la mancanza di sclerosi circostante capace d' impedire l' invasione sierosa rammolliscono anche esse e perfino suppurano. Ed infine vi sono infiammazioni tubercolari in cui, sia per la località poco

esposta ai traumi, sia per condizioni favorevoli di lentezza del processo, masse anche grosse sono incapsulate, non rammolliscono, anzi calcificano, e ciò succede perfino nell'organo meno favorevolmente disposto, nel polmone, sotto la forma dei tubercoli obsoleti. Ripeto perciò, che l'azione locale della tubercolina illustra anche, secondo il mio modo di vedere, la questione generale di genesi del rammollamento delle masse caseose per l'invasione di siero.

Crediamo quindi lecito poter conchiudere da tutti i fatti osservati, che l'azione locale della tubercolina, se non riesce curativa specificamente contro il bacillo della tubercolosi specialmente quando il nodulo specifico è recente e non ancora caseificato, ne dissolve rapidamente il terreno di cultura quando già è cominciata la caseificazione, per cui il bacillo può essere coinvolto in quella distruzione; e ciò che più importa mette le condizioni favorevoli per l'eliminazione dei focolai specifici: inoltre se vi è molta norma nella propinazione del rimedio si potrà con quella longanimità richiesta dalla gravezza del male arrivar a sequestrare semprepiù focolai che non si possono emettere al mondo esterno, mediante la formazione di tessuti riparatori, che col loro consolidamento chiudono poco per volta le vie alla disseminazione ed alla metastasi. Non si può negare che per norme non ancora assodate la tubercolina tante volte agisce rapidamente, rammollisce focolai tubercolari, i quali, sia perchè non si trovano su superficie libere e perciò capaci di essere eliminati all'esterno, sia perchè non ancora si è formata la barriera locale di connettivo fibroso, infettano più rapidamente la vicinanza ed il resto dell'organismo, oltre i guasti locali meccanici, come nel laringe, di continuità, come nell'intestino, ecc., che si possono indurre.

Sull'azione locale del siero trasudato, dietro l'applicazione della tubercolina, si sono voluti giustificare gli altri metodi recentissimi per la cura della tubercolosi: si opina che sia l'azione microbicida del siero del sangue, o aggiunto al tisico da animali refrattarii, capra, cane, (Richet, Lepine), ovvero arrivato dallo stesso malato per iperemie locali indotte nelle parti affette da rimedii, co-

me il cantaridato di potassa (Liebreich, Reàl, quest' ultimo che ne reclama la priorità di quasi 20 anni), e forse anche col ioduro di potassio (Sticker) mediante il riattivamento del ricambio materiale, che ha dato risultati incoraggianti a questi Autori. Noi non possiamo approfondirci su ciò per non divagar molto, ed essendo ancora le conclusioni *sub indice* : solo facciamo rilevare l' esperienza negativa di Foà, anche rafforzando, secondo Richet, la supposta proprietà vaccinante del siero di sangue dell' animale refrattario, pollo, verso la cavia animale assolutamente recettivo.

Per ciò che riguarda l' azione generale della tubercolina, sebbene fosse un argomento che in gran parte si sottrae agli studii anatomo-patologici, facciamo rilevare le profonde modificazioni del ricambio materiale, da cui la febbre, e forse alterazioni più speciali su certi organi, massime del sistema nervoso, dell' apparecchio urinario, ecc. ed in ciò si è quasi generalmente di accordo : ma non si può ancora dire, se poco per volta avviene tale una modificazione del ricambio stesso da indurre l' immunità per l' ulteriore attecchimento del bacillo tubercolare; come è sicuro il contrario, che cioè almeno per un tempo notevole il bacillo che era annidato non è distrutto.

Non possiamo quindi negare, che finora le grandi speranze concepite per i risultati ottenuti sugli animali non sono state confermate sull' uomo : anzi hanno sorpreso i risultati sperimentali perfettamente contrarii a quelli di Koch, ottenuti nelle stesse condizioni e sugli stessi animali, come quelli di Dubief capo del laboratorio di batteriologia di Dujardin-Beaumetz, ed i recentissimi di Baumgarten per cui i conigli e le cavie, infettati di tubercolosi, con tutte le iniezioni di tubercolina fanno svolgere fatalmente il processo sino alla morte, e che le inoculazioni preventive sono inefficaci contro il terribile bacillo. A questo proposito dobbiamo far rilevare che tanti altri, tra i quali nominiamo Klebs e poi Scholl assistente di Hueppe nell' Istituto igienico di Praga hanno confermato i risultati di Koch ; e quindi con probabilità i risultati

opposti dei primi hanno dipeso soltanto dal non aver adoperato tutte le norme e cautele dettate da Koch.

A questa discordia surta anche nel campo sperimentale, aggiungendo i risultati clinici contrari abbastanza numerosi, perfino contro il valore diagnostico (Leyden ecc.), e principalmente contro il valore curativo, che anche nei casi più fortunati e promettenti ha fatto notare la recidiva financo negli affetti da lupus e tubercolosi della ossa, (e ciò da persone competenti nella materia ed ammiratori di Koch (Bergmann ecc.), segue ai più fiduciosi il dubbio, mentre dimostra che un lato debole sta nella tubercolina, il quale deve essere corretto: non è ammissibile, che in una questione in cui tutti sperano e con la più buona volontà si fosse tanto esagerato nei risultati sfavorevoli. Dall'altra parte della bilancia pesano anche i risultati favorevoli, e perciò noi fidenti nel valore della scoverta aspetteremo, augurandoci da una parte che le affermazioni di Koch sieno confermate da tutti, e che si arrivi con nuovi studii di laboratorio e principalmente di clinica a scernere e separare possibilmente i 2 effetti opposti: e ciò ci farebbe sperare l'ultimo lavoro del Klebs, il quale ha cercato di separare nella linfa di Koch col cloroformio una sostanza di effetto tossico, dall'altra di effetto salutare, vaccinante, che resta libera nell'alcool: ed ha dimostrato con una nuova serie di sperimenti, che la tubercolina così depurata produce negli animali tubercolosi gli stessi benefici effetti della linfa originaria, e nell'uomo sano nessun effetto molesto o morboso: Klebs arrivò a queste conclusioni, partendo dal fatto che la tubercolina propinata agli animali non dà mai certi inconvenienti che si manifestano nell'uomo, e quindi si mise alla risoluzione del quesito, se per avventura nella linfa di Koch tra le varie sostanze ne esistesse una capace di provocare sull'uomo, e non sugli animali, quelle conseguenze nocive, che mettono in preoccupazione il pratico nella sua amministrazione.

È quindi necessario ed è stato il voto della maggioranza, moltiplicare gli studii con un esame rigoroso e complesso degli effetti della tubercolina, possibilmente depurata secondo Klebs, sul san-

gue, urina, sudori, saliva e secrezioni in genere, circolazione, innervazione e poi nutrizione generale, tanto rimpetto all' organismo sano, come all' ammalato, per poter dare conclusioni più positive fondate sul valore fisiologico e terapeutico della linfa, notando le differenze di effetti tra gli animali e l' uomo, e possibilmente trovarne le ragioni.

Che tante volte si sperimenti con una linfa che non sia la vera, ed in questi casi probabilmente mal preparata, è possibile, ma noi riteniamo ciò molto improbabile: chi volete, che volesse trar guadagno da un' operazione difficile, lunga, costosa massime per località, apparecchi ecc. quando in generale ognuno se ne provvede dal laboratorio di Koch sia direttamente, sia per mezzo del Governo? Si potrebbe anche mettere in discussione, se la linfa di Koch in tutte le fabbricazioni e manipolazioni successive non abbia subìto delle modificazioni intime, relative a stadii diversi di vita del bacillo, le quali avessero potuto avere influenza sulla diversità di natura di rimedio e quindi dei risultati perfino sperimentali: ma anche a ciò crediamo poco, quando ci è arra l' esattezza e la minuziosità a cui si informano i lavori che si fanno nell' Istituto di Igiene di Berlino.

Il fatto è che la quistione dei vaccini non si può generalizzare per tutte le infezioni; ve ne sono alcune che danno questa modificazione degli umori in modo che gl' individui una volta sofferta quell' infezione per un tempo più o meno lungo diventano refrattarii allo stesso morbo, vuol dire ne restano vaccinati (esantemi acuti, tifo, sifilide ecc.) Altre infezioni invece o non inducono questa modificazione vaccinante, ovvero essa dura tanto poco tempo, per cui gli ammalati facilmente ricadono (malaria, blenorragia, ecc.). — Altre infezioni, che meglio dovrebbero dare l'effetto utile della vaccinazione, perchè la causa morbosa si mette e sviluppa in modo relativamente lento, mostrano invece lo sviluppo progressivo ed inesorabile dell'agente patogeno e dei suoi effetti morbosi, ed in ciò è tipico il bacillo della tubercolosi; ed infatti l'esperienza c' insegna che l' infezione tubercolare o non è capace di vaccinare l' individuo

affetto, ovvero i suoi prodotti sono talmente complessi, che la sostanza vaccinante deve essere neutralizzata e paralizzata nei suoi effetti salutari da sostanze nocive.

In attesa perciò, che la grave questione s' illustri, io devo ripetere anche ora ciò, che dissi fin dal principio della scoverta nella mia scuola; che, cioè, è necessario dilucidare certi dubbii sull' azione benefica dell' estratto di culture tubercolari, almeno così si sarà meno restii a sperimentare questa specie di vaccino anche sull' uomo.

I nostri dubbii, poi condivisi da altri, sono i seguenti:

1° Perchè i focolai tubercolari non sono essi stessi la fonte della tubercolina nell' organismo malato?

2° Perchè i figli di tubercolotici, quasi inesorabilmente finiscono col diventare anch'essi tisici, mentre avrebbero dovuto essere vaccinati nell' utero materno (quando la madre è tubercolotica), come succede nel vaiuolo e forse in altri morbi infettivi: ovvero vaccinati fin dal primo momento per vaccinazione già avvenuta degli elementi generatori negli organismi dei genitori malati?

La prole non è altro, che l' effetto utile o meglio il prodotto della unione intima della cellula spermatica coll' ovarica, e più propriamente dei loro nuclei, e con maggior precisione, come ha dimostrato Fol, di quella danza e fusione intima consecutiva dei corpuscoli polari di von Beneden sia del nucleo spermatico che dell'ovarico, a cui segue la commistione e fusione dei filamenti cromatici dei 2 nuclei, in modo che in ciascun elemento dell' organismo figlio vi è la contribuzione anatomica eguale dei 2 elementi generatori del padre e della madre. Così si spiega in un modo chiaro l' eredità, che l' è una continuazione perfetta delle qualità dei genitori. Ora che cosa si può trasmettere dai genitori tubercolotici alla prole? Non il bacillo, a meno che non vi fosse tubercolosi con ulcerazione dei genitali: allora il bacillo accompagna gli elementi generatori, ed il primo sviluppo embrionale sarebbe precocemente arrestato e l' effetto utile del concepimento nullo; ciò è indubitato per altre infezioni, come la sifilide. Se invece manca la tuberco-

losi dei genitali non si può trasmettere con gli elementi generatori che l' estratto, già riassorbito, dei tessuti tubercolizzati, e perfino filtrato attraverso la placenta : allora quei figli dovrebbero essere immuni ed addirittura refrattarii in tutta la loro vita alla tubercolosi; a meno che non vi sia lesione placentare, la quale soltanto potrebbe far pervenire nel prodotto del concepimento i batterii, ed allora si avrebbe la tubercolosi non ereditaria, ma congenita, come si ha col vaiuolo, e si nasce ammalati di simili infezioni. Che se l' infezione congenita manca, i figli dei tisici non dovrebbero mai diventare tubercolotici : invece disgraziatamente succede il contrario, e ciò contradice l' azione salutare vaccinante della tubercolina. Potrebbe essere che la tubercolosi si trasmette ereditariamente per germi che noi ancora ignoriamo nella loro esistenza, forse spore, o altri stadii speciali del microbio non ancora ben stabiliti, e Baumgarten conferma questa opinione da ciò che si osserva per la sifilide ereditaria tardiva : ma per ora ogni affermazione sarebbe gratuita, ed è necessaria la conferma di studii ulteriori : comunque sia non possiamo pel momento confortare colla statistica desolante della tisi ereditaria il trovato della tubercolina.

Si potrebbe dire, che l' estratto dei focolai tubercolari nell'uomo riesce inefficace, anzi dannoso sia per l' individuo stesso, che per i figli, perchè all' estratto dei prodotti tubercolari si addizionano quelli piogeni e di putrefazione, che ordinariamente non mancano nei focolai tubercolari del pulmone già ulcerati ; e veramente io aveva creduto in primo tempo che i prodotti specifici del bacillo tubercolare fossero se non distrutti almeno neutralizzati nella loro azione salutare dai prodotti del ricambio di altri batterii : ed ho detto ciò fin dal principio di quest' anno nella scuola, ricordando che la tisi tubercolare dei polmoni è un morbo complesso, anche come lato etiologico, restando sempre la causa primigenia ed essenziale nel bacillo tubercolare. E quindi dissi, che si doveva sperare forse nella selezione della linfa, cioè nel suo depuramento e separazione dei prodotti tubercolari dagli altri quando la linfa avesse dovuto servire per iniezioni, mentre nello stesso organismo

gli effetti propri salutari della tubercolina avrebbero potuto risaltare e prendere il sopravvento, sopprimendo gli effetti dei prodotti piogeni, come ad esempio col guaiacolo, sperimentato eccellente antipiogeno da Marfori nell'Istituto di Bizzozero.

Ma non si può essere a lungo lusingati da questa speranza, riflettendo che nella tubercolosi sperimentale sugli animali, in cui si forma prima un focolaio tubercolare puro, non si possono invocare prodotti di altri batteri fino a che non è venuta l'ulcerazione del nodo: e se resta il sospetto, che soltanto dopo ciò, attecchendo ivi altri batterii dovesse derivarne l'inutilità della vera tubercolina, sarebbe molto utile con tutti i mezzi opportuni farne il confronto coll' impedire qualunque altro arrivo di germi batterici sulla località del nodo tubercolare da inoculazione. Allora sarebbe giusto il giudizio, che nella tubercolosi miliare acuta dell'uomo se non si morisse per la grande dose di pura tubercolina riassorbita dalle innumerevoli granulazioni grigie, l' individuo affetto dovrebbe guarire nel modo più radicale dalla infezione tubercolare; e si dovrebbe avere la guarigione completa del vecchio focolaio tubercolare più o meno nascosto, che col suo rammollamento caseoso e distruzione delle barriere circostanti ha immesso nel torrente circolatorio quei piccoli ammassi caseosi infettanti. Se ciò fosse vero, e se con ulteriori studii si arrivasse a limitare l'azione della soverchia quantità di tubercolina, la tubercolosi miliare acuta con la quale sempre si muore, diventerebbe una crisi salutare, con la quale si assicurerebbe nel modo più perentorio l' immunità da ulteriori infezioni tubercolari.

Crediamo perciò aperto il campo ad una quantità di ricerche che io stesso avrei in parte intrapreso, se una serie di sventure non avesse finora paralizzata la mia volontà. Solo col dichiarare tante altre incognite si potrà meglio apprezzare e mettere nei giusti termini rimpetto all'uomo questa scoverta del celebre professore di Berlino, al quale invito la nostra Accademia di mandare un voto di plauso, anche per questo suo ultimo trovato. E concludo, che nella peggiore ipotesi, se la scoverta ultima di Koch

non si potrà applicare all' uomo sofferente, specialmente se sarà confermato il sospetto suesposto, cioè dell' *azione della tubercolina favorevole alla moltiplicazione sporiforme del bacillo*, resterà sempre una serie di fatti e di metodi, che metteranno gli studiosi sulla via di ricercare argomenti importanti, e se non altro la febbre di tutto il mondo per trovare un rimedio contro la tubercolosi.

La tubercolina Koch nella Lebbra

del Dott. P. FERRARI.

—

MEMORIA

letta all' Accademia Gioenia di Catania nella seduta del 24 Maggio 1891.

Quando il prof. Koch presentò la sua *linfa* come rimedio specifico contro la *tisi* tubercolare, la scoperta fu salutata dal mondo intiero con il maggior plauso per il suo scopritore, con la più lieta speranza per l' umanità.

Ma una gravissima malattia pure esisteva, molto analoga alla tubercolosi, voglio dire la lebbra, per cui il nuovo rimedio anco contro di questa venne adoperato da Goldschmitt, Arning, Doutrelepont, Martins, Hallopeau, Josph, Neumann, Bardeleben, Babès, Kalindero, Macs, Kaposi, Watson-Cheyne, Danielssen, de Amicis, e finalmente da me, di cui eccomi a narrare le osservazioni.

1° CASO — P. G. d'Augusta (*Siracusa*), d' anni 26, celibe, operaio. Ha il padre vivo, e sano; la madre invece gli è morta per lebbra. Da 14 anni datano le prime manifestazioni del male. Entra in clinica il 27 gennaio 1890.

Stato attuale—Costituzione linfatica; apparecchio scheletrico regolare; nutrizione deficiente; alto della persona. Esistono ad ambedue i sopracigli, disposti in serie lineare, dei tubercoli di varia grandezza, cioè da quella di un granello ad una nocciuola. Sono di un colorito rosso-scuro. Altri tubercoli della stessa grandezza stanno in modo sparso agli zigomi ed al mento, non che uno si vede al lato esterno del cerchio pericorneale dell' occhio destro, mentre

molte macchie unite a numerosi tubercoli disseminati si trovano agli arti tanto superiori, che inferiori dove alcuni hanno sede nell' ipoderma. Il padiglione di ambedue gli orecchi è notevolmente ingrossato per infiltrato cellulare (*edema duro*), e la regione dorsale d' ambo le mani apparisce così intensamente pigmentata da simulare il cuoio dell' elefante. Sensibilità elettro-muscolare diminuita; però si mostra normale se si ha l' avvertenza di lavar prima la parte con acqua alcoolizzata. Mancava la sensibilità del tatto, del dolore, della pressione, e della temperatura. L'occhio destro non percepisce la notte, nè il giorno; il globo oculare nel suo emisfero anteriore sembra alquanto deformato per la presenza di un tessuto giallo-rossastro, accumulato specialmente sulla regione ciliare, quadrante inferiore esterno, e che si estende sulla cornea per 4 mill. circa, con bordo arrotondato, e rilevato per più di un mill.; liscio, e aderente. Dall'esame fatto sembra dunque che il nodulo lebbroso abbia determinato un irido-ciclite cronica, la quale ancora non si è dileguata. Con l'esame laringoscopico poi si nota; l'ugola distrutta alla sua punta; epiglottide sana; aritnoidi ingrossate; infiltrato lebbroso nel terzo posteriore della corda vocale destra. L'alito è fetidissimo. Temperatura del corpo 37°.

L' esame microscopico di un tubercolo rivelò numerosi bacilli; nel sangue nessuno (1). Quello emometrico, ed emoglobinurico non dette alcun che degno di speciale attenzione; nelle orine reazione acida. Onde non stare a ripetere che ogni volta ed in ogni infermo vennero praticati questi esami lo dirò ora per sempre, che queste ricerche sono state praticate in tutti con lo stesso risultato. Aggiungerò ancora, che l' esame batterioscopico del sangue fu sempre negativo, anco durante la reazione generale.

Diagnosi—Lebbra maculo-tubercolare con anestesia.

Cura con la tubercolina—Il primo febbraio inietto nella regione infrascapulare 1 mill. di questo rimedio, ed ottengo dopo 4 ore

(1) I metodi che in queste ricerche batterioscopiche ho adoperato furono quelli di Baumgarten, e di Gram.

reazione generale, e dopo 24 anco quella locale nei tubercoli dei sopracigli, ed in quelli degli avambracci in vicinanza delle regioni radio-cerpiche, lato della estensione. La reazione generale durò 29 giorni, segnando il tracciato delle curve termometriche un massimo di 40, ed un minimo di 36, 5. Così dal lato della reazione locale osservai: 1° che i tubercoli s'erano fatti rossi, tumidi, e dalla loro superficie si faceva una impercettibile essudazione che sul principio sembrava raccolta sotto lo stato corneo, ma che poi finì, col dar luogo ad una sottile squammo-crosta grigia, superficialissima e sottile, lamellare; 2° che si facevano novelle eruzioni tubercolari; 3° che i tubercoli nei quali si era manifestata la reazione, scomparivano senza lasciar cicatrice, o appena una macula che andò in seguito dileguandosi.

Dopo questa reazione di 29 giorni, a seguito dell'iniezione di 1 mill. di linfa Koch, cessò ogni fenomeno reattivo, rimanendo lo infermo diminuito in peso di 4 Kili, con la temperatura del corpo che non giungeva a 37° ed in uno stato di grandissima prostrazione. Un vitto ricostituente, e del vino di marsala fecero ritornare nello infermo la nutrizione e la forza, tantochè egli stesso, incoraggiato dal vantaggio ottenuto con la prima iniezione, volle li ripetessi la cura Koch, ciò ch'io feci con un 1 mill. di linfa. Anco questa volta di lì a poche ore dall'iniezione comparvero la reazione generale e locale che fu seguìta da scomparsa, e riapparizione di nuovi tubercoli. La reazione generale però questa volta non superò i 38, 5 per 14 giorni; poi vi fu apiressia per 11 giorni, dopo dei quali tornò la febbre, che durò altri 7 giorni segnando un massimo di 38, 9, ed un minimo di 37, 2.

In questo secondo accesso febbrile ridestossi la reazione locale in qualche tubercolo non distrutto completamente dalla prima reazione. Anzi debbo quì pur notare, come abbia visto ritornare la reazione locale, dopo che questa e quella generale erano cessate da 10 giorni.

L'infermo intanto si mostrò ancor più della prima volta abbattuto, e denutrito talmente, che pareva addirittura un cadavere,

che dico il vero non ebbi il coraggio di avventurarlo alla continuazione di una simil cura.

Riguardo al decorso debbo notare, che dopo la 1ª iniezione (8-10 giorni) l'infermo provò per 3-4 ore di seguito nausea, e tendenza al vomito, disturbo che si dileguò dietro l' uso di qualche goccia d'etere solforico, e di qualche pezzetto di ghiaccio. Così ebbe a lamentarsi nello stesso tempo di dolori intensi, e profondi delle ossa delle gambe, e delle braccia, che gli durarono per ben quattro giorni.

Chiudendosi il 30 giugno la clinica, pel cessar degli studi dell'anno accademico 1890-91, l'infermo venne licenziato quasi completamente guarito. Dico quasi, perchè non erano scomparsi completamente alcuni piccoli tubercoli, che sono stati di poi cauterizzati col termo-cauterio al nostro ambulatorio. Ora però si può dire completamente guarito, perchè ha ripreso la sua nutrizione, la sua forza, ed il suo buon umore, non che ha migliorato nella sensibilità con la cura elettrica. Le macule pure vanno scolorandosi. Non posso a meno di notare intanto questo fatto; che mentre il nostro infermo aveva un atteggiamento come di persona sofferente e profondamente afflitta, ora si presenta invece con l' aitanza e la floridezza di un giovinotto a 26 anni, come egli è, dichiarandosi lieto di tornare a lavorare.

2º Caso — D. S. di Pachino (*Siracusa*) d'anni 33, ammogliato con prole, e di professione carrettiere. I genitori, e gli avi suoi non soffriron di lebbra, salvo una sorella, ed i di lei figli. La sua malattia data da sei anni. Entra in clinica il 10 marzo 1891.

Stato attuale — È di costituzione sanguigno-venosa, di forme atletiche. Presenta ai due sopracigli una corona di tubercoli grossi quanto una ciliegia, alla cui superficie si veggono delle piccole punteggiature nere, che non sono altro che lo sbocco dei follicoli pilo-sebacei. Altri tubercoli sono al mento, agli zigomi, non che in modo sparso al petto, all'addome, ed agli arti superiori, ed inferiori. Hanno un colorito rosso-scuro. Di più esiste al lato esterno del cerchio pericorneale dell' occhio sinistro un piccolo tubercolo si-

mile per forma, e colore ad una fravola. In nessuna località affetta vi ha completa anestesia, soltanto si nota una leggiera diminuzione nel senso tattile, e dolorifico invece notevolmente trovasi diminuita la forza muscolare. Temperatura del corpo 37°.

Diagnosi—Lebbra tubercolare.

Cura con la tubercolina—Si praticano sette iniezioni del rimedio, incominciando da mezzo mill., e aumentando progressivamente, di mezzo mill. per ogni iniezione: cosicchè in sette iniezioni ne inoculai 17 mill. Però solo la prima volta si ebbe una reazione generale di 38, 7 che durò 4 ore; mai invece si notò quella locale.

Vedendo frattanto inefficace questa cura, ricorsi allora all' iniezioni ipodermiche di acetato di timol e di mercurio, che con tanto vantaggio uso nella sifilide. Ma neanche da questo rimedio vedendo il malato risultarne giovamento alcuno, lasciò la clinica il 19 aprile per ritornarvi il 18 maggio susseguente. Il 19 gli pratico una iniezione del rimedio alla dose di 1 mill. al che dopo cinque ore tien dietro una reazione generale, che s'inizia con la temperatura di 38, 2, e che di lì a due ore ridiscende a 37. Inietto subito il giorno dopo altro mill. di tubercolina ma questa volta non ne segue alcuna reazione generale, e locale, ed invece sorgono i seguenti fenomeni: dolor di denti e loro vacillamento, scosse muscolari cloniche di tutto il corpo, che si ripetono tre volte nelle ventiquattro ore, per la poco durata di un secondo, o più. Frattanto il dolore di denti si dilegua, non però il loro vacillamento, che dura diversi giorni. Così non compariscono più le scosse muscolari. Sospesa la cura Koch sottopongo l'infermo all'uso interno dell' ittiolo, e del vino al creosoto, ed all' escisione dei tubercoli. Nel momento l'infermo si trova migliorato più che altro moralmente, per trovarsi libero dai tubercoli della faccia, che lo deturpavano; nel resto delle manifestazioni maculo-tubercolari e nell' anestesia nessun cambiamento.

3° Caso—C. G. di Solarino (*Siracusa*) d'anni 20, celibe, contadino, entra in clinica il 20 aprile 1891.

Stato attuale—Alto della persona, di regolare sviluppo scheletrico e muscolare, ed in buona nutrizione. È di costituzione linfa-

tica, gli mancano i peli ai sopracigli, ed offre un' infiltrazione leprosa diffusa alla fronte, sopracigli, guancie, ed orecchi. Superficiali ectasie vascolari serpeggiano nelle regioni zigomatiche. Senza anestesia. Temperatura del corpo 37°.

Diagnosi—Lebbra a infiltrazione diffusa.

Cura con la tubercolina—Dopo tre iniezioni di questo rimedio, alla dose di un mill. a due e mezzo, in tutto quattro mill. e mezzo, l' infermo non vedendo seguirne alcuna reazione generale, o locale, spontaneamente lasciò la clinica il 29 aprile.

4° Caso—O. S. di Solarino (*Siracusa*), d'anni 31 ammogliato, ma senza figli. Non riconosce causa ereditaria, ma ha un fratello lebbroso, che più tardi entra parimente in clinica. È ammesso in clinica li 8 aprile 1891.

Stato attuale—Ha costituzione linfatica, basso di statura; del resto assai ben nutrito. Presenta uno stato di edema duro per infiltrazione cellulare diffusa dei sopracigli, che mostransi alopecici. Questo stato apparisce egualmente in ambedue gli orecchi. Inoltre esistono tre piccoli tubercoli ai sopracigli, ed uno alla guancia destra. Leggiera anestesia nei punti ammalati. Temperatura del corpo 37°.

Diagnosi—Lebbra tubercolare con anestesia.

Cura con la tubercolina — Fu fatta una iniezione di un mill., a cui dopo due ore tenne dietro la reazione generale che durò 16 giorni, e gradatamente poi ogni giorno aumentando, al settimo giorno segnò la sera 40, 5. Poi gradatamente discedendo raggiunse la mattina del 16° giorno la temperatura normale. Sotto questa reazione si verificò ancora una reazione locale nei tubercoli, che in breve scomparvero, e quello che è da notarsi sopratutto, che pure l'edema duro andò diminuendo, diminuzione che l'infermo notò benissimo vedendo muoversi liberamente i suoi orecchini, che prima stavano come infossati nel lobulo degli orecchi. Feci una 2ª iniezione di 1 mill. e mezzo, che venne seguìta da una sola reazione di 39, 6. L'infermo uscì dall' Istituto il 12 maggio contento del miglioramento ottenuto.

5° Caso—M. G. d'anni 38, maritata con prole. È proietta, e quindi impossibilità nella ricerca di cause gentilizie. Entra in clinica il 19 aprile 1891 e narra, che la di lei malattia data da 4 anni.

Stato attuale—Macchie e tubercoli sparsi tanto agli arti superiori che inferiori, ed alla faccia. In tutti i punti ove sono queste manifestazioni esiste anestesia. Curioso che la manifestazione è pruriginosa. È mestruata regolarmente.

Diagnosi—Lebbra tubercolare con anestesia.

Cura con la tubercolina—Abbiamo praticato 6 iniezioni, da 1 a 3 mill. Ciascuna volta si è avuta reazione generale, una volta sino a 39, 9, ma mai ha durato più di 24 ore. Non notai in alcun punto il più piccolo segno di reazione locale. Dopo le prime due iniezioni l'inferma ebbe nella notte abbondantissimo sudore.

6° Caso.—M. C. di Solarino, d'anni 26, nubile, entra in Clinica il 18 aprile. Ha padre e madre sana. Ha delle sorelle sane, una sola è morta per lebbra. Fu mestruata a 14 anni, ma fu sempre dismenorroica. A 13 anni soffrì di scarlatina a cui seguì anasarca: poi delle febbri intermittenti. Da 12 anni sono comparsi in lei i primi fenomeni della lebbra.

Stato attuale — È alta di statura, e di bello e proporzionato sviluppo organico. Le sono caduti i sopracigli, ed offre un'intumescenza duro-elastica delle guance con arborizzazioni telangettasiche sulla superficie della pelle. Simile intumescenza esiste al padiglione di ambedue gli orecchi. Ha tubercoli disseminati agli arti inferiori, e superiori. Agli inferiori vi sono quattro tubercoli ulcerati per la estensione di due lire. Anestesia sulle manifestazioni.

Cura con la tubercolina—Vennero praticate 7 iniezioni di linfa, fino a 4 mill. ma non si ottenne ogni volta che una reazione generale di poche ore, e che non superò i 38, 2. Ebbe profuso sudore nella notte (1), dopo le prime iniezioni. Sottoposta all'uso interno dell'olio di chaulmoogros, e del vino creosotato, e localmente

(1) Il profuso sudore notato in questa inferma, e in quella dell' osservazione precedente è stato pure osservato dal dott. Ryan di Colchester.

a quello dell'iodoforme con calomelano, l'inferma guarì delle ulceri alle gambe, ma niun altro miglioramento si ebbe a notare. Il 30 giugno uscì dalla clinica.

7°. Caso—O. G. d'anni 20, celibe, contadino, entrò in Clinica il 17 aprile.

Stato attuale—Nessuna pertinenza ereditaria, secondo narra lo infermo, però ha un fratello lebbroso. Il male gli incominciò con delle macchie rosso-vive a tutta la faccia al suo 19° anno di età; poi dopo un anno gli comparvero dei tubercoli, i quali a poco a poco ingrandirono, e confluendo, lo deformarono orribilmente. Di qui il processo leproso si estese a tutto il resto del corpo, ed agli arti, ove i tubercoli si ulcerarono, riparandone poi alcuni che lasciarono delle cicatrici acromiche, sotto forma di strie atrofiche. Anestesia nel punto delle manifestazioni.

Diagnosi — Lebbra tubercolare.

Cura con la tubercolina — Fu fatta un'iniezione di 1 mill. e si ebbe forte e lunga reazione generale e locale. La prima durò 22 giorni. La seconda si estese alla maggior parte delle manifestazioni leproidi del corpo, le quali modificaronsi con un processo di atrofia, o di cicatrizzazione dei tubercoli ulcerati. Allora dopo questo primo splendido risultato, con più lieta speranza tornai a ripetere l'iniezione, aumentando la dose del rimedio, ma non mi è stato dato ottener più in 4 iniezioni successive alcuna reazione locale, o generale. Non mi si osservi, che il rimedio potesse aver perduto delle sue proprietà, perchè le due iniezioni ultime glie l'ho fatte con linfa pervenutami allora allora dal Ministero. Soffrì di dolori nelle ossa che durarono due giorni facendosi sentire specialmente la notte. Il 30 giugno lasciò la clinica notevolmente migliorato.

8° Caso — B. G. di Messina, d'anni 26, ammogliato da pochi mesi, ed al momento senza figli. Da due anni datano i primi segni del male, e soltanto in famiglia ha avuto un fratello affetto da lebbra. È preso in cura da me privatamente.

Stato attuale—Di costituzione linfatico-venosa, assai ben nutrito,

di struttura regolare. Presenta numerosissimi tubercoli di varia grandezza alla fronte, ai sopracigli, al mento, alle guancie ed agli arti, In quest' ultime regioni alcuni si sono risoluti lasciando delle macule pigmentate, che vanno decolorandosi dal centro verso la periferia. Esiste un tubercolo tanto a destra che a sinistra in vicinanza dell' epididimo. Non esiste in alcun punto delle manifestazioni anestesia. Temperatura del corpo normale.

Diagnosi — Lebbra tubercolare.

Cura con la tubercolina — Iniettai un mill. di questo rimedio, e dopo 10 ore si ebbe una reazione generale fino a 39, che durò circa 12 ore. Ripetei l' iniezione con due mill. due giorni dopo, ma non si ebbe che una più breve, e debolissima reazione generale, fatto che si verificò pure nelle successive iniezioni, che furono in numero di 7. Quello che tuttavia è degno di nota è questo, che tanto dopo la prima, che la seconda iniezione l' infermo avvertì nel punto dell' iniezione, (regione infrascapulare), un dolore con senso di formicolio per tutte le spalle, che a dir suo si dirigeva in doppio senso, cioè dalla puntura alla periferia, e viceversa. Frattanto non vedendo egli alcun utile resultato dalle iniezioni volle sospenderle, ed allora gli incominciai la cura seguente, per la quale migliorò notevolmente; 1° cauterizzazione col termo-cauterio dei tubercoli più grossi, praticata in diverse volte nei vari punti; 2° compressione dei tubercoli più piccoli, e delle infiltrazioni con le fasce elastiche; 3° finalmente amministrazione per uso interno del decotto di Pollini, secondo i formularî, con olio di chaulmoogros, e vino creosotato.

Questo è quello che io ho ottenuto dai suddetti esperimenti; intanto cosa osservarono gli altri?

Martins costatò in un caso di lebbra tubercolare soltanto una reazione generale. Arning in un lebbroso sospetto di tubercolosi, mentre non vide reazione alcuna, in altri due la reazione l'osservò dopo che gli erano stati iniettati da 6-10 mill. di tubercolina. Josph costatò in un caso una reazione locale ben manifesta, ed Hallopeau una reazione generale e locale accompagnata da intensi do-

lori nei noduli, che durarono per alquanti giorni. Anco il Neumann osservò una reazione locale con dolore nei nodi lebbrosi, e Bardeleben l' ebbe a costatare soltanto in un caso in cui la reazione generale comparve dopo l' iniezione di 1 cent. Questo autore notò pure una piccola tumefazione nei punti ammalati, che il giorno dopo si mostrarono come infossati, cosa ch'io pure osservai nell'infermo dell' ottava osservazione, nel quale s' erano come depressi al centro, e quello che è singolare, che passandoci sopra con la mano non si aveva più la sensazione di rilievo alcuno. Bardeleben poi aggiunge ancora, che in altri casi con 15 mill. ed anche 13 cent. mai vide una reazione generale, solamente le manifestazioni locali si cuoprivano di squamme bianche, e secche.

Babès, e Kalindero curarono 2 casi di lebbra nervosa, e 5 di lebbra tubercolare, ed in tutti ottennero reazione generale, ed in quest' ultimi anco quella locale. La febbre in questi casi di regola incominciò dopo 24 ore, raramente dopo 12. La reazione locale invece dopo più giorni di cura. Videro la lebbra laringea migliorare dopo una reazione locale, e credono dalla differenza di azione del rimedio Koch di potere stabilire la diagnosi differenziale tra la lebbra, e la tubercolosi.

Doutrelepont in un caso ebbe a verificare a seguito della cura Koch la comparsa di eritemi diffusi, ed uno stato iperemico dei tubercoli, ed in un secondo dei nuovi focolari lebbrosi che ritiene non una conseguenza del nuovo rimedio. In quest' ultimo caso si rinvennero nello sputo, e nel sangue numerosi bacilli della lebbra. Tuttavia vi mancò una vera azione curativa.

La lebbra delle mucose non ha offerto alcuna reazione. Solo in casi di lebbra nervosa con un'azione generale si vide comparire una reazione locale. In 6 casi uno di questi mostrò una reazione generale progressiva con febbre serotina, per cui qualcuno ha pensato doversi ciò attribuire forse alla generale malattia della pelle.

Il dott. C. Danielssen ha egualmente sperimentato la tubercolina nella lebbra, ed ecco a quali conclusioni l' egregio specialista

viene in una sua memoria pubblicata recentemente a Bergen nel Medicinsk Revue:

" 1°. Che la tubercolina nei lebbrosi dà reazioni generali e locali: quelle generali si manifestano ordinariamente 4-6 ore dopo l'iniezione: alcune volte 12 ore, e di rado dopo 2-3 giorni. Le reazioni locali appariscono più tardi.

" 2°. Che queste reazioni apportano conseguenze sfavorevolissime sulla malattia, aggravandone anzi il male più che mai, sebbene generalmente abbiano la più grande uguaglianza con le reazioni delle preparazioni iodiche nei lebbrosi.

" 3°. Che la linfa non uccide i bacilli della lebbra, ma sembra invece gli dia alimento (un mezzo favorevole alla loro vita) vita, e modo di riproduzione favorendone pure la loro circolazione nel sangue, e pel corpo, per cui è preferibile di lasciare la malattia a se stessa.

" 4°. Che dopo essere stato iniettato un individuo parecchie volte con la linfa può divenire in certo modo immune, ma in nessun modo arresta il male, nè distrugge i bacilli.

Finalmente l' illustre dermatologo di Bergen scrive, che " I bacilli della lebbra si trovano con molta facilità sotto la reazione destata da questo medicamento fallace, e continuano in seguito il loro lavoro distruggitore, d'onde ne segue un peggioramento sempre più grande della malattia. „ (1)

Al *Kings College Hospital* fu costatato in un caso di lebbra anestetica dopo la 2ª iniezione; febbre, dolore agli arti, eruzione rosso-scura, simmetria, squammosa con all'alluce sinistro una vescica grande, ed al 2° dito ed al mignolo una tumefazione, ed anestesia di tutto il piede. Kaposi pure ricorda un fatto di notevole reazione locale e generale in un caso di lebbra anestetica. Così Watson-Cheyne ebbe a notare in un simile caso di lebbra reazione gene-

(1) Danielssen — Tuberkulinen (Kochs lymfe) anvendt paa spedalske i Lungegaardshospitalet (Medicinsk Revue " s junihefte 1891).

rale, dolori ed un'eruzione ungueale; ed il Goldschmidt in 5 casi sui quali ebbe a provare la linfa, ottenne:

1°. Che le dosi al di sotto di 1 mill. erano senza azione;

2°. Di 1 mill. in 3 casi ebbe dopo più di 24 ore reazione generale, ed in due reazione locale;

3°. Che dosi maggiori, ma al disotto di 1 cent. eccetto un caso, dettero febbre, ed in una reazione locale;

4°. Che la febbre delle mucose non ha reagito;

5°. Che nella lebbra dei nervi vi fu reazione generale, e leggiera locale;

6°. Che un caso mostrò una reazione speciale, progressiva, accompagnata da febbre serotina, forse in seguito alla universale malattia cutanea.

Cosicchè per il suesposto sembrami indubbiamente ne venga la conclusione che la tubercolina non dispiega affatto per sè una diretta azione utile nella lebbra. Come nella tubercolosi così nella lebbra agisce nella sua forma torpida e ciò ritengo sia da ripetersi piuttosto che da un'azione specifica del rimedio, dalla poco resistenza dei tessuti ammalati di fronte all'anormale attività del ricambio materiale dalla tubercolina suscitato. Questo modo di considerare la cosa parmi venga a confortare eziandio l'opinione che io tengo sull'analogia di processo fra la tubercolosi, e la lebbra, al che può aggiungersi anco il fatto che, ne avvalora poi più che sempre il concetto nostro, dell'estrinsecazione di nuovi tubercoli durante il parossismo febbrile, ed il trovare fragmentati i bacilli, come ebbero a verificarlo il mio 1° assistente D.r R. De Luca, ed il prof. Di Mattei, che insieme fecero queste ricerche sopra i detti infermi della mia clinica, e la di cui loro istoria ho innanzi narrato.

Dal R. Istituto Dermosifilopatico di Catania, il 1° Maggio 1891.

Fine del periodo eruttivo di Vulcano e stato attuale del cratere.

Nota del Prof. S. CONSIGLIO PONTE

letta all' Accademia Gioenia nell' adunanza del dì 21 Giugno 1891.

I.

L'illustre vulcanologo Leopoldo Pilla comunicò a questa Accademia nella tornata del 10 settembre 1835 una nota dal titolo " Paralello fra i tre Vulcani ardenti d' Italia „ Vesuvio, Stromboli, Etna, collocando Vulcano fra i semi-spenti o fra le solfatare, contrariamente a come pensavano il Dolomieu e lo Spallanzani, che vi scorgevano un vulcano in riposo piuttosto d' intermettenza che d'estinzione. Nessun altro studio venne comunicato sulle Eolie fino al 1888, in cui Vulcano, quasi a volere smentire il Pilla, ci ha dato la imponente eruzione, che richiama tuttora l' attenzione dei geologi e principalmente dei vulcanologi, sia italiani che stranieri.

Il compianto mio maestro Prof. O. Silvestri, di cui serberò viva memoria per ossequio e gratitudine, fece, su Vulcano, tre importanti comunicazioni: una nella tornata del 23 dicembre 1888 tracciando l' andamento dell' eruzione fino a tale epoca: un' altra nella tornata del 23 giugno 1889, con la quale comunicava oralmente, e a tratti generali, il seguito della storia della eruzione medesima, i fenomeni studiati sul posto nel febbraio 1889 e le ricerche e i lavori eseguiti, ai quali partecipai collaborandovi: una terza in fine nella tornata del 22 dicembre dello stesso anno, occupandosi dell' Etna, della Sicilia e delle isole adiacenti.

Da queste comunicazioni si rileva che la recente eruzione di Vulcano è stata delle più formidabili e che non trova riscontro tra le storiche se non in quella assegnata al 1771 e alla quale si attribuisce la corrente di ossidiana, che tuttora si osserva freschissima sull' esterno versante NNW del monte vulcanico. E malgrado

che la recente eruzione non avesse dato corso di lava fluente, pure c'è dovizia di fatti, i quali testimoniano la manipolazione di un magma lavico, nel focolare vulcanico, lanciato a strappi più o meno voluminosi dalle continue e molteplici esplosioni, da segnarsi a centinaia in un sol giorno e per la durata di circa venti mesi con alternativa di depressione e di recrudescenza principalmente, nella quale si ebbero violentissimi parossismi.

Negli ultimi mesi di questo periodo la intermittenza delle esplosioni si fa sempre più lunga, vi predominano le deboli eruzioni e i prodotti sono prevalentemente ammassi di vapori con sabbia e poche pietre, che cadendo entro lo stesso cratere tendono a colmarlo. Infatti nel settembre 1889, quando Vulcano fu visitato dall'Associazione geologica di Londra, che organizzò una escursione scientifica per le regioni vulcaniche italiane, quale centenario del viaggio alle Due Sicilie di Lazzaro Spallanzani, lo stato del cratere era immensamente trasformato e assai modificato in confronto a quello che presentava nel febbraio dello stesso anno, quand'io ebbi la favorevole occasione di visitarlo per la prima volta.

Nel settembre il cratere si presentava per la maggior parte colmato di materiali frammentari, e dalla parte di N. si sprofondava poco più di una ventina di metri, (1) mentre nel febbraio, quand'era in pienissima attività, da fare più di 300 esplosioni al giorno, lo vidi con una profondità non inferiore ai 150 metri a partire dal lato di N. ch'è la parte più bassa dell'arco del cratere medesimo.

Nel gennaio 1890 l'attività continua come nei mesi precedenti e le eruzioni sono miste, alternandosi le deboli con le forti ad intervalli ordinariamente di circa mezz'ora o più, e predominandovi vapore acqueo e sabbia. Negli ultimi di gennaio il cratere è quasi sempre pieno di vapori bianchi, sicchè in generale è venuta meno la forza di propulsione e quindi mancano le pietre e la sabbia mentre il vapore in gran quantità si accumula all'interno del cratere medesimo.

Lo stesso stato manifesta nella 1ª decade di febbraio e in

(1) G. Platania—Stromboli e Vulcano nel settembre 1889.

corrispondenza pigliano maggiore attività i fumaioli esterni. Nella 2ª decade le eruzioni ripigliano vigoria, che si continua nella 3ª e il cratere dà eruzioni anche miste. Nel marzo si risveglia sempre più l'attività del vulcano e le eruzioni si fanno forti e fortissime, per quanto la sera del giorno 15 alle ore 9,15 il cratere fa un'eruzione spaventevole con gran fuoco, rombi e rumori fortissimi e prolungati.

Il lapillo, che presento e che faceva parte del materiale frammentario fatto saltare in aria, raggiunge l' abitato dell' isola di Lipari attraversando un tratto di sette chilometri circa. La popolazione fu allarmatissima per la pioggia di quel lapillo, credendolo foriero di un nuovo periodo eruttivo. Questa esplosione fu preceduta da una leggiera scossa di terremoto accompagnata da forti rombi e tutto inteso a Lipari verso le 10 di mattina nella stessa giornata.

Le eruzioni forti continuano fino al giorno 18 inclusivo, indi cominciano a indebolirsi e col giorno 28 cessano; ma i fumaioli esterni riprendono grande attività e costituiscono la sola manifestazione, che testimonia l'ultimo avanzo di un periodo eruttivo già quasi esaurito.

Dall'aprile in poi non si osserva che emissione di ammassi di sabbia, senza pietre, e così di seguito fino a quando il cratere entra nella fase di sofaltara per avviarsi probabilmente a quella di estinzione.

Ora la diminuzione di attività eruttiva, che preparò la potente esplosione del marzo, se fu realmente un accenno di cessazione della lunghissima attività del cratere di Vulcano, fu nello stesso tempo una condizione che doveva favorire all'interno lo accumulo di tanto vapore e con tale tensione da dover produrre uno di quei potenti parossismi vulcanici, che, come ultimo conato, precedono la fase di estinzione. Infatti i materiali frammentari lanciati dalle decrescenti propulsioni, doveano ritornare entro il cratere e doveano ammassarsi in modo da tendere a colmarlo e quindi ad impedire l'ulteriore sviluppo di quegli ammassi di vapori, che sarebbero scappati liberi e successivamente, se la gola si fosse conservata sgombra, come nel periodo di piena attività vulcanica.

I vapori ammassati e imprigionati dovevano raggiungere tale tensione da vincere l' ostacolo sovraincombente e mandare in aria tutto quel materiale accumulato , sfogando quest' ultimo avanzo di energia interna. In quell'ultima potente esplosione del marzo quindi si ebbe una di queste manifestazioni, e dallo stato del cratere prima e dopo di quella esplosione, e dalla natura del lapillo lanciato fino a Lipari, si potrà approssimativamente valutare, come rileverò in seguito , la grande massa di materiale frammentario cacciato in aria e la forza potente, con la quale agì il vapore accumulato.

Fin dal settembre 1889 si era già osservato che, quantunque non mancassero le forti e anche fortissime eruzioni e con materiali solidi più o meno abbondanti , pure da qualche tempo la maggior parte dei prodotti eruttivi cadeva entro il cratere stesso, il quale erasi in gran parte colmato , da presentare a N. ove l' orlo è più basso, la profondità di una ventina di metri circa. Così il fondo era talmente rialzato da far perdere l'imponenza al cratere, il quale rappresentava solo un' ampia depressione subcircolare con quella bassa profondità e un maggior diametro all' orlo di poco più di 200 metri. In tale condizione permetteva di potersi attraversare senza destare quel raccapriccio che destava quando motravasi, e come lo vidi nel febbraio 1889, quale immensa bolgia con più di 150 metri di profondità dalla parte dell' orlo più basso. Allora vomitava incalzanti e colossali nembi di vapori, fitti, neri, squarciati da fulmini e accompagnati da massi infuocati , che si vedevano uscire dalla ignivoma gola, assistendo dall' orlo, e lanciati a più di 700 metri di altezza, mentre che gli ammassi roteanti di vapori misti a cenere si elevavano fino a 10 chilometri e mezzo sotto la spinta di propulsione per la tensione enorme del vapore compresso entro il focolare vulcanico (1).

Fino a quando la gola fu aperta e permise il facile passaggio, le eruzioni si succedevano con un certo ritmo più o meno fre-

(1) Questa osservazione si deve a misure angolari prese dal prof. A. Riccò dall'Osservatorio Astronomico di Palermo, sulla colonna ascendente, distintamente visibile anche a grande distanza, e nella esplosione ch' ebbe luogo alle ore 4 30' p. m. il 6 Gennaio 1889.

quente ; ma quando le condizioni interne determinarono un certo grado di depressione nell' attività eruttiva e i materiali ricadevano entro il cratere medesimo , fu occlusa la via e l' ostacolo opposto dalla massa, principalmente di lapillo, che colmava quella voragine, obbligò il vapore ad accumularsi nel focolare vulcanico e raggiunto il momento critico vinse quella enorme resistenza e produsse la spaventevole eruzione del marzo. In essa si mise allo scoperto un'altra bolgia, che, vuotata di quella grande massa di bombe, rottami e lapillo , raddoppiò il fondo del cratere lasciando in contempo i segni che testimoniano fin dove si era colmata la fossa.

Il nuovo stato del cratere favorì la successiva calma, giacchè non essendo più il vapore ostacolato nel libero sviluppo, il vulcano entrò in quella fase di solfatara, in cui è tuttora e, non essendovi proezioni solide, la gola del cratere si è mantenuta sempre sgombra e lungi dalla minaccia di altra esplosione per accumulo di vapore ostacolato nella sua libera emissione.

Si può quindi affermare che il periodo eruttivo di Vulcano , durato più di ventidue mesi , ebbe fine col maggio-giugno 1890 , entrando il cratere in una nuova fase, in cui tuttora continua, come ho potuto constatare per una recente escursione fattavi e della quale passo a dare un cenno.

II.

Nello scorcio del marzo 1891 mi recai all'Isola di Vulcano per completare uno studio speciale sulle bombe di nuova formazione e venute fuori durante l'ultima eruzione 1888-90. (1)

Ebbi l'agio di potere osservare e studiare lo stato attuale del cratere, paragonandolo a quello che presentava nel febbraio 1889, quando trovavasi in pienissima attività. In complesso può dirsi che

(1) Mi propongo di comunicare una nota sul riguardo, dopo la prossima pubblicazione della Relazione generale sull' eruzione di Vulcano, fatta al R. Governo dall'apposita Commissione, a cui presi parte come assistente. La nota sarà una specie di appendice alla Relazione medesima.

la differenza tra lo stato di allora e l'attuale si è quella precisamente, che potrà rilevarsi tra lo stato di un vulcano in piena fase pliniana e quello in fase solfatariana.

Osservato il cratere a distanza o dalla base, lascia solamente vedere le attive fumaiole che soffiano a getto continuo sull'orlo del recinto esterno e nell'arco compreso tra N. e NW e principalmente verso N. Attorno alle fumaiole e per tutto il cennato arco la cresta è tappezzata di sublimazioni gialle e giallo-bianchicce. In modo incerto poi si osservano dallo esterno le emanazioni che s' inalzano dalla cavità centrale del cratere, cioè dalla gola eruttiva, che dà luogo a tali manifestazioni gassose. Da una fotografia presa dal porto di ponente il giorno 26 marzo alle 5 p. m., si rileva lo stato esterno del cratere medesimo.

Sui versanti esterni del monte non si manifestano più quelle emanazioni di vapori, che si sviluppavano nel febbraio 1889 durante la piena attività del cratere. Per esse, certo risultanti da vapori acquei, la superficie esterna del cono era tappezzata di grandi macchie nere per sabbia inumidita, anzi bagnata, dai vapori medesimi. Si sprigionavano principalmente sul versante W e proprio in direzione verso ove all' interno del cratere attivo corrispondeva il promontorio detto di *Mastro Rosario.* Quelle emanazioni poi chiaramente accennavano che la massa costituente il cono dovea essere in qualche parte attraversata da fratture radiali, che sotto la tensione dei vapori interni, doveano dare a questi passaggio per manifestarsi all'esterno.

La serie degli attuali fumaiuoli esterni non la cedono per attività a quelli ch'erano attivi durante il periodo eruttivo del cratere; solamente ora dànno luogo alla produzione di quelle macchie gialle e giallo-bianchicce, che si estendono attorno alle bocche di emissione (come rilevasi dalla fotografia) e che allora non si sarebbero potute distinguere, anche formandosi, per la soprapposizione continua del materiale frammentario proveniente dalle continue esplosioni.

Se si toglie lo spesso strato di lapillo e sabbia disseminato di

massi e bombe che raggiungono dimensioni colossali e che avvertono con la loro freschezza di esservi stata recente eruzione, il monte vulcanico all' esterno non accenna ad alcun cambiamento dello stato, in cui trovavasi prima che fosse scoppiata l' eruzione medesima.

Alla base del monte e precisamente nella spiaggia del porto di levante, proprio dietro il faraglione piccolo o cava dell' allume, osservai la solita acqua calda, che bagna quella specie di ghiaia, che si distende verso la riva. Praticato un piccolo cavo a circa due metri da questa, vi si accumulò dell' acqua calda, quasi fumante, che al termometro segnava + 79 C. con leggerissima reazione acida inerte alle carte di sale di piombo. A lunghi intervalli scappava dal fondo qualche piccolissima bolla gassosa, che suppongo essere di acido carbonico, e a cui devesi la leggerissima reazione acida. Tentai di raccogliere quel gas per saggiarlo anche sul posto, ma non mi fu possibile, giacchè dopo più di mezz' ora non potei raccoglierne che meno di un mezzo contimetro cubico.

Un saggio indicativo fatto in gabinetto su quell' acqua mi ha dato i seguenti risultati: Cloruri abbondantissimi. Solfati molto abbondanti. Calce abbondante. Magnesia quantità sensibile. Fosfati tracce trascurabili. Allumina abbondante.

Credo che la composizione chimica di quell' acqua e la temperatura dipendano da tre condizioni principali; cioè, vicinanza al mare e quindi abbondanza di cloruri e presenza di magnesia, e l' acqua difatti è salatissima al gusto e amara: comunicazione più o meno diretta col focolare del cratere per mezzo di fratture sotterranee, quindi l' alta temperatura e in parte l' abbondanza dei solfati e della calce, per la produzione, come vedremo in seguito, e i depositi di gesso; finalmente il passaggio dei vapori interni attraverso la massa costituente il faraglione piccolo o grotta dell' allume, certo fratturata, quindi abbondanza dell' allumina medesima. Difatti è in questo faraglione che si sviluppa la spiaggia e alla parte di levante era praticato un cavo che metteva allo scoperto l' ammasso dell' allume, di cui risulta. Vi si entrava carponi anzi quasi strisciando

sul ventre, ma ora non trovasi più in seguito ad una frana, forse per l' urto delle onde.

Il 26 marzo feci una prima e il 27 una seconda ascensione sul cratere. L'inclinazione che presenta all'esterno sui versanti più accessibili oscilla tra 30° e 35°; la superficie è mobilissima essendo completamente rivestita di lapillo, sabbia e cenere, ultimi prodotti di eruzione quando il cratere cominciava a perdere la sua attività. Feci l'ascensione a ponente della corrente di ossidiana e serpeggiando per guadagnare l'altezza colla minor fatica possibile. Tuttora non esiste alcun viottolo battuto e si è obbligati muoversi sopra suolo mobilissimo, ove si affonda facilmente, e allo spesso si retrocede di qualche passo, perchè tuttora quel tritume è del tutto sciolto non avendo avuto il tempo necessario di essere cementato e così rendere meno faticosa la salita. Del resto in circa tre quarti d'ora raggiunsi la cresta ove trovasi le regioni dei fumaiuoli esterni, che si osservano nella fotografia. A questo punto il mio aneroide segnava una elevazione di circa 250 metri sulla base, questo è l' arco meno elevato di tutta la cresta di un primo recinto e che guarda sensibilmente tramontana.

I fumaiuoli esterni di quest'arco originano depositi di sublimazioni formando le estese macchie gialle e giallo-bianchicce, delle quali presento alcuni campioni. Essi risultano costituiti da lapillo, sabbia, cenere alterati dalle emanazioni acide, cementati da formazione di gesso e rivestiti di zolfo cristallizzato.

Varcata la cresta esterna si entra in un ampio recinto con circa cinque metri di depressione e limitato all' interno da un' altra cresta, più alta che dista dalla prima circa una cinquantina di metri e la quale costituisce l' orlo dell' attuale cavo crateriforme, e questo sul luogo è chiamato la Fossa di Vulcano. Quell' ampio recinto è quasi concentrico alla bocca del cratere; ha la massima ampiezza dalla parte di ponente e si restringe successivamente verso levante e mezzogiorno, in modo che raggiunto l' arco SE-S-SW si fonde nell' unica cresta, che limita la bocca del cratere da questa parte.

Il recinto è completamente e fittamente disseminato di tutto lo svariato materiale emesso da Vulcano; principalmente negli ultimi

periodi di attività decrescente. In mezzo a tanto pietrame e materiale frammentario di tutte le dimensioni e di tutte le varietà, si rinvengono delle bombe colossali, sia pomicee che compatte e di grande peso. Presento la fotografia di una delle bombe massicce che trovasi al lato di ponente e presa sul posto il giorno 27 marzo. Accanto ad essa osservasi la guida, che mi accompagnava e dalle dimensioni dell'una e dell'altra potrà rilevarsi l'imponente mole di quella bomba e lo sforzo potente necessario per cacciarla dal focolare vulcanico attraverso la gola e lanciarla, chi sa a quale altezza, prima di raggiungere il posto in cui trovasi.

Il giovane che mi faceva da guida è dell'altezza di circa metri 1,70 e di compostezza proporzionata.

Percorso quel recinto, per lo studio del materiale ivi disseminato, mi feci ad osservare, dall'alto, l'interno della gran fossa, costituita da un ampio cavo imbutiforme ed ellittico con asse maggiore, alla parte superiore, considerato ad occhio, di circa 200 metri in direzione di NNW-SSE e con asse minore di 130 a 140 metri circa. La superficie del pendio interno è tutt'altro che regolare e presenta varii gradini, quasichè il cavo crateriforme risultasse da diverse bolge, che del resto trovano la spiegazione nelle vicende di periodi alternanti di attività e di sosta del vulcano medesimo. L'inclinazione interna sensibilmente può considerarsi di 30 a 35 gradi, quindi accessibilissimo il fondo, fino però ad un certo punto; ivi bisogna assolutamente arrestarsi. Fatta la discesa di poco più di una trentina di metri si è varcata la prima bolgia e si è sopra un gradino di tre o quattro metri di piano per potere entrare poi nella seconda bolgia. Anch'essa ha poco più di una trentina di m. di profondità, però nella metà abbracciata sensibilmente dalla semiellisse W a circa 15 metri o poco più di profondità c'è un gradino con 3 a 4 metri di piano pel quale si scende lungo il resto della bolgia, mentre la semiellisse E ha unico pendìo, sempre beninteso accessibile come il resto della fossa, principalmente pel materiale sparso su tutta la superficie interna.

Raggiunta la base di questa bolgia, cioè a circa una settan-

tina di metri di profondità, si è sopra un piano più esteso, relativamente a quello delle indicate bolge e in esso apresi eccentricamente la bocca dell'ultima bolgia, che comunica con la gola del vulcano, e della profondità di circa una trentina di metri, ma con pendio che raggiunge e forse supera i sessanta gradi e a parete regolarissima. Dimodochè per questo solo sarebbe anche assolutamente inaccessibile, se altre condizioni non concorressero ad impedirlo. Il fondo di quest' ultimo cavo rappresenta il vero fondo del cratere, ch' è un piano quasi circolare del diametro di circa una decina di metri. Sensibilmente corrisponde ad uno dei due fuochi dell' ellisse, che forma la fossa di Vulcano e che si avvicina alla parte di N e precisamente verso il punto ove si manifestarono le spaccature del 1873, quando incominciarono le prime manifestazioni, che con un crescendo interrotto da periodi di apparente diminuzione, ci hanno condotto a quest' ultima imponente e lunga eruzione del 1888-90. Le spaccature del 1873 poi sono in direzione del gruppo dei fumaiuoli esterni, che nella fotografia si osservano di maggiore attività.

Ora io credo fondatamente che la origine di queste bolge si debba al modo di come è proceduto l'ultimo periodo, quando il cratere entrava nella fase solfatariana, in cui tuttora continua. In esse quindi abbiamo i documenti di succesione dell' altalena negli ultimi conati di attività esplodente.

Quando nel settembre 1889, Vulcano fu visitato dalla Società inglese, la profondità del cratere a N fu trovata poco più di una ventina di metri; vuol dire che la fossa era limitata a quella parte dell'attuale, che ho chiamato la prima bolgia e il resto era completamente colmato, e la fossa come una semplice ampia depressione poco profonda si attraversava passandosi dall' una all' altra parte dell' orlo del cratere. Il materiale frammentario grosso e minuto, che colmava il resto era il prodotto dell'attività interna, che abbassata, volgeva e rivolgeva il materiale che avrebbe dovuto lanciare fuori, se vi fossero state forti esplosioni, e che per deficienza di energia accumulava entro la fossa medesima. Ho tro-

vato la conferma di quel rimaneggiamento di materiale nel cratere, in parecchi frammenti di materiale spezzato, che si presentano arrotondati piuttostochè a spigoli vivi di frattura. Li rinvenni poi quasi impegolati all'esterno di una colossale bomba , emessa probabilmente in quella potente esplosione e che trasportò seco passando attraverso il materiale frammentario accumulato entro la fossa.

Continuò quello stato fino al 15 marzo quando avvenne alle 9, 15 di sera la potente esplosione, che lanciò in aria tutto il materiale, che riempiva l'attuale seconda bolgia e che spinse attorno al cratere per oltre a 7 chilometri di raggio, almeno verso N, per cui a Lipari fu raccolto il lapillo, che ho presentato. Calcolata approssimativamente la capacità di questa bolgia e quindi il volume e il peso del materiale frammentario accumulatovisi, si ha, almeno, un volume di circa 75000 mc. e un peso maggiore a 100000 tonnellate. Si desuma ora lo sforzo necessario per lanciare quel materiale a tanta altezza, dalla quale parte di esso si spinse con traettoria parabolica e venne a cadere alla distanza di oltre 7 chilometri.

Orbene, l'attuale interna attività del cratere è manifestata da fumaioli sparsi quasi su tutta la superficie interna della fossa, con intensità crescente discendendosi entro il cratere medesimo. Già appena si è su l'orlo, ove si abbraccia coll'occhio l'interno di tutta la fossa, si avverte molto sensibile l'odore caratteristico e abbastanza intenso dell'idrogeno solforato, che proviene principalmente dalle attivissime emanazioni della gola del cratere.

Scendendosi per la prima bolgia e anche per la seconda , le pareti sono del tutto ricoperte di sublimazioni bianche , accidentate da macchie gialle, principalmente attorno e al disotto delle grossissime bombe compatte, che sono disseminate all'interno, e sotto alle quali scappano attivissimi fumaiuoli esalanti vapori acidi, con predominanza, di acido solforoso.

Le sublimazioni bianche , che presento , risultano da masse cristalline aciculari e acidissime ; sono gruppi di cristalli aciculari di gesso, limpidi e trasparenti, a reazione acida, per l'acido solforoso , di cui sono compenetrati ; contenendo inoltre tracce trascu-

rabili di cloruri, piccola quantità di magnesia e sensibile quantità di allumina.

Credo di qualche importanza richiamare l' attenzione su l' abito cristallino di esse, dovendone possibilmente indagare le speciali condizioni determinanti. È un abito che molto si approssima a quello della sericolite o gesso fibroso sericeo; ma in questo i cristalli non sono sensibilmente aciculari come quei delle sublimazioni in parola.

Per quanto io mi sappia non trovo uno studio esteso e fatto di proposito sulle diverse condizioni determinanti i diversi aspetti cristallini assunti dal gesso: solo è detto che il gesso contenente molto (beaucoup) acido cloridrico produce cristallini più delicati e poco sviluppati (1).

Ho fatto una lunga serie di esperienze sopra varie qualità di gesso cristallizzato e di diversa provenienza e credo di aver potuto constatare dei fatti, che ci portano a spiegare fino ad un certo punto l' abito cristallino delle sublimazioni gessose di Vulcano.

Il gesso, sia proveniente da masse concrezionari, sia da selenite, sia da sericolite o da altre varietà più o meno cristalline, sciolto nell' acqua dà al microscopio cristalli quasi costantemente tabulari o a ferro di lancia o al più bacillari—La stessa soluzione delle diverse varietà di gesso, acidificata anche con sole tracce di acido cloridrico (non fa bisogno che sia molto), acido solforoso, acido nitrico, idrogeno solforato, acido borico, mi ha dato i seguenti varii risultati.

Con acido cloridrico, cristalli in predominanza aghiformi isolati, lunghi, sottili e anche bi-acuminati se rari, e intersecantisi a due, a tre, a quattro in tutte le direzioni, a forma d' alberetti o dendritiformi, a ramificazioni sottilissime, o a doppii ventagli riuniti per gli apici e finalmente ad ammassi raggiati o a fitta rete.

Con acido solforoso, predominanza di cristalli aghiformi anche

(1) C. Klement et A. Renard. Rèactions microchimiques à cristaux et leur applications en analyse qualitative.

intersecantisi e formando gruppi, ma sempre con abito sensibilmente aciculare.

Con acido nitrico, quasi tutti bastoncini o isolati o a fascio.

Con idrogeno solforato, bacillari se piccoli e isolati, e a piano ferro di lancia se grandi o a gruppi; e proprio con quell' abito, che predomina nella selenite delle zolfare.

Chi sa che in queste essa non si sia formata sotto l' influenza di emanazioni d' idrogeno solforato.

Con acido borico, predominanza pacchetti a ventaglio semplice o doppio, sfrangiati divergendo: acuminati ma corti e formati da altri più piccoli.

Risulta quindi che l' abito aciculare predomina formandosi i cristalli sotto l' influenza dell' acido cloridrico o dell' acido solforoso.

Ora osservando attentamente questi cristalli, anche isolati, si può constatare che risultano da fasci paralleli, alle volte con apici divergenti, di sottilissimi prismi monoclini, non diversi da quelli che, essendo isolati e bene sviluppati, si presentano bacillari.—Però siccome sotto l' influenza di quegli acidi si sono formati sottilissimi e lunghi non si rende sensibile la coppia pinacoide basale e le estremità sembrano appuntate.—E se se ne costituiscono dei fasci paralleli risultanti da sottilissimi prismi a lunghezza sempre più dicrescente, si otterranno dei cristalli sensibilmente a forma di aghi biacuminati, non potendosi, per la estrema loro sottigliezza, osservare le gradinate che devono esistere verso le estremità del fascio medesimo.—Questa spiegazione è suffragata dal potersi osservare in alcuni di questi cristalli i loro componenti che divergono e si allontanano per le loro estremità e che costituendosi a fasci sensibili originano i ventagli semplici o doppii, oppure le masse raggiate.—Non credo di potere rassomigliare quei cristalli acuminati, in apparenza, ai microliti o cristalloidi detti *trichiti*, non avendo questi alcuna azione sulla luce polalizzata e quindi ritenuti come principio o aborto di cristallizzazione.

Ma se quelle osservazioni ci spiegano l' origine dei cristalli aciculari delle sublimazioni gessose di Vulcano, non ci spiegano

perchè l'influenza di quegli acidi origini i cristalli di gesso tanto sottili e allungati.

Trovate quelle condizioni, spiego facilmente l'abito, che presentano quelle sublimazioni di gesso; cioè dovere la forma aciculare all'influenza dell'acido solforoso che l'accompagna, anzi forse che l'origina. — La nitidezza e la trasparenza poi dei gruppi di cristalli devesi al processo lento di formazione, per cui il gesso non si concreziona.—Anche nella regione bassa della Forgia Vecchia ho raccolto del gesso in parte cristallizzato in parte terroso, ed è una vecchia formazione che dovette originarsi con qualche rapidità e non favorita da vapori troppo acidi.—Lo stesso posso dire per altro gesso trovato tra le spaccature del tufo, che forma l'interno di uno dei tre vecchi crateri di Vulcanello.

Or non è improbabile che queste calde e acide emanazioni serpeggiando per interne fratture possano comunicare, come dissi, la temperatura e in parte l'abbondanza dei solfati e della calce, che si trovano nell'acqua calda della spiaggia.

Continuando la discesa verso il fondo del cratere si rileva sempre più crescente l'attività dei fumaiuoli e le sublimazioni cambiano abito, lasciando la predominanza cristallina e originandosi piuttosto concrezioni di gesso, costituenti una trama che viene riempita da depositi di zolfo sensibilmente amorfo e di solfuri di arsenico.—Le sublimazioni che presento si mostrano gialle e giallo-rossicce, a secondo ch'è il solo zolfo che riempie la trama di gesso o vi abbondano i solfuri di arsenico.—Si osserva inoltre che la loro formazione ha avuto luogo rapidamente e sotto l'influenza di attivissime emanazioni, per quanto tutta la massa è cosparsa di tanti canaletti, che rappresentano la via per dove sono scappati i getti di vapori carichi di quelle sostanze che formano le concrezioni.

Raggiunto il piano, ove incomincia l'ultima bolgia, ossia la vera gola attiva del cratere, osservai che la superficie interna è abbastanza levigata, rivestita completamente da sublimazioni gialle e giallo-rossicce e gremita d'attivissimi fumaioli, che con incessanti emanazioni riempiono quasi costantemente quest'ultimo cavo.—Se

qualche corrente d' aria esterna sgombra per poco la gola , si osservano le pareti del tutto fumanti. — Le emanazioni poi d' idrogeno solforato sono tanto intense, che non vi si può restare a lungo senza accusare il disturbo, molesto e anche nocivo , provocato da quel gas.

Dall' orlo a spigolo vivo del cavo si può osservare , in certi momenti, il vero fondo del cratere attuale, alla profondità di circa una trentina di metri.—Fui sorpreso per l' aspetto ch' esso mi presentò.—Piuttostochè mostrarsi con accumulo disordinato di materiale frammentario più o meno grosso in mezzo a spaccature e a fumaiuoli attivissimi, com' ebbi ad osservare, sebbene a maggiore distanza, nei brevissimi periodi di calma nel febbraio 1889, constatai che il fondo risultava da un piano , quasi circolare , sensibilmente orizzontale e relativamente levigato, con alquante sporgenze, come grosse pietre rotondeggianti di colore giallo vivo e giallo-rossiccio sopra un fondo bruniccio, e come se fossero in esso conficcate.

Profittando di opportuni intervalli, per accurata osservazione, constatai, sia ad occhio nudo e principalmente servendomi del binocolo, esservi sul fondo una crosta che uguagliava la superficie di esso e certamente prodotta dalle attive emanazioni. — Questo fatto però non mi spiegava come una semplice crosta deposta sopra un cumulo di materiale frammentario avrebbe potuto rendere sensibilmente orizzontale il piano del fondo del cratere.—Mi sorse il dubbio che si trattasse di crosta formatasi sopra un elemento livellatore e quindi il sospetto di qualche deposito liquido in fondo al cratere medesimo; sola condizione che avrebbe potuto spiegare quanto si osservava.—Facendovi lanciare dalla mia guida alcune pietre, mentr' io guardava col binocolo , constatai infatti che trattavasi di un piccolo lago a piano sensibilmente circolare del diametro apparente di un otto metri circa e rivestito in fatto da una crosta. — Rotta questa sotto l' urto delle pietre lanciatevi, mettevasi allo scoperto dell' acqua bruniccia, ove terminato il movimento delle onde liquide prodotte dal tonfo dei sassi, la crosta tornava a chiudersi e la superficie tornava levigata.

Da quanto potei osservare ripetutamente, risulta che in fondo al cratere trovasi un deposito d'acqua, certamente calda, coperta da una crosta di zolfo o altro, depostovi dalle continue e attive emanazioni del fondo, e quelle sporgenze gialle o giallo-rossicce disseminate in esso erano il materiale più grosso sporgente e rivestito di depositi d'incrostazione depostivi dai fumaiuoli attivi.

Sarebbe riuscito impossibile potere attingere direttamente di quell'acqua e altro materiale, ma se mi fossi potuto trattenere più a lungo in quella visita, avrei superato probabilmente le difficoltà servendomi di mezzi indiretti.

Non potendo altro, tentai però di fissare alla meglio lo stato di quella gola fumante servendomi della fotografia. Non possedevo una machinetta a mano, tanto comoda in simili casi, e mi fu di grave disagio salire il monte e discendere nel cratere con una macchina grande, con la quale non potei rilevare il fondo non essendo stato possibile inclinarla di troppo, per quanto mi sia avvicinato proprio all'orlo di quell'ultima bolgia. Inoltre non potevo trattenermi a lungo entro il cratere e principalmente alla bocca della gola fumante per le continue emanazioni d'idrogeno solforato, le quali avrebbero attaccato profondamente il sale di argento della lastra sensibile. Pigliate le possibili precauzioni per evitare questo certissimo e gravissimo inconveniente, mi accontentai di riprodurre il versante interno dal cavo centrale e che guarda ponente e l'orlo da questo stesso lato, ove si osservano tuttora delle grosse bombe.

Or volendo dare una spiegazione dell'origine del laghetto esistente in fondo al cratere, non credo improbabile trovarla nello stato di emanazione, in cui è attualmente la fossa. Cosicchè potrebbe ammettersi essere un accumulo di vapori acquei condensati e trattenuti dal fondo per cementazione avvenuta nei materiali frammentarii, che lo costituiscono. La incessante condensazione poi di nuovi vapori compenserebbe quel tanto d'acqua che potrebbe infiltrarsi nel fondo medesimo. Potrebbe cercarsene anche la causa in condizioni esterne e ascriverla a deposito d'acqua in seguito a piogge invernali?

Non credo che si possa essere sul momento autorizzati a dire

sul riguardo l'ultima parola perchè mancano i dati necessarii, e piuttostochè precipitare in spiegazioni infondate, credo sia preferibile attendere le condizioni opportune per interpretare positivamente il fenomeno osservato. (1)

Dopo di essersi conosciuto il corso del periodo eruttivo e lo stato attuale del cratere di Vulcano, nasce spontanea la curiosità di sapere se possiamo formulare delle previsioni sullo stato ch' esso potrà assumere in seguito dopo un elasso di tempo più o meno lungo.

Non credo che si possa dare una risposta in modo affermativo ed esplicito perchè non si conoscono tutte le leggi, nè credo che possano essere nettamente delineate. Ma richiamando in concorso tutti i fatti studiati nel lunghissimo periodo di quest'ultima eruzione e quelli di altri vulcani nelle diverse fasi, potrà azzardarsi qualche giudizio di previsione.

Io penso che, per le probabili condizioni interne, sotto le quali ha avuto luogo il periodo eruttivo: che per la lunga durata di esso, e per la fase in cui si mantiene il cratere da circa un anno, non sia difficile di vedere rientrare Vulcano nel suo relativo stato di calma per ritornare la Fossa ad essere sorgente di speculazione come per il passato. Ma potrà anche darsi che il mio giudizio venisse smentito da inaspettato e imprevedibile risveglio.

Ad ogni modo termino considerando il mio giudizio come Davy considerava l'ipotesi, la quale, diceva di essere " un uncino a cui " dobbiamo per forza attaccare il volume delle nostre cognizioni. " Se collo accumularsi dei fattti l'uncino reggerà, buon per noi, se " no, prenderemo consiglio dai nuovi eventi e da quello che il tarlo " del tempo avrà messo a nudo. "

(1) Rendo pubbliche grazie ai signori A. E. Narlian, comproprietario e Direttore della Fossa di Vulcano, e Tommaso Carnevale di Lipari, per le cortesie usatemi durante la mia escursione.

Sulle curve brachistocrone

Nota del Prof. G. PENNACCHIETTI

Letta all'Accademia Gioenia nell'adunanza del dì 18 giugno 1891.

Dopo avere esposto alcune generalità sulle forme che possono darsi alle equazioni generali del moto brachistocrono, dimostro intorno a questo problema alcune proposizioni che hanno analogia con teoremi noti riferentisi al moto d'un punto materiale libero o semplicemente obbligato a rimanere sopra una superficie fissa data.

§ I.

Le coordinate del punto mobile rispetto a tre assi ortogonali siano x, y, z al tempo t, e sia T la forza viva, la quale, supponendo, per semplicità, la massa eguale all' unità, è uguale alla metà del quadrato della velocità. Siano X, Y, Z le componenti della forza sollecitante rispetto agli assi, e supponiamo che esista una funzione U della forza dipendente dalle sole coordinate del punto mobile. Le equazioni del moto brachistocrono saranno, com'è noto:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\frac{dx}{dt}\right) &= -\frac{X}{T}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\frac{dy}{dt}\right) &= -\frac{Y}{T}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\frac{dz}{dt}\right) &= -\frac{Z}{T}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Introducendo tre incognite ausiliarie u, v, w, al sistema di queste tre equazioni differenziali ordinarie di second'ordine si può

sostituire il seguente sistema di sei equazioni differenziali ordinarie di prim' ordine :

$$\frac{dx}{dt} = Tu\,, \qquad \frac{dy}{dt} = Tv\,, \qquad \frac{dz}{dt} = Tw\,, \tag{2}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{X}{T}\,, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{Y}{T}\,, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{Z}{T}\,. \tag{3}$$

Se per mezzo di :

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right),$$

eliminiamo T dalle equazioni (2), (3), queste formeranno un sistema normale.

Cambiando momentaneamente la variabile indipendente col porre :

$$\int T\,dt = t_1\,,$$

le equazioni del moto brachistocrono prendono la forma :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt_1^2} &= -\frac{X}{T^2}\,, \\ \frac{d^2y}{dt_1^2} &= -\frac{Y}{T^2}\,, \\ \frac{d^2z}{dt_1^2} &= -\frac{Z}{T^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Se si aggiunge la condizione che il mobile debba trovarsi sopra una superficie fissa data, la cui equazione sia :

$$f(x,\, y,\, z) = 0\,, \tag{5}$$

a questo sistema si sostituirà il seguente:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt_1^2} &= -\frac{X}{T^2} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt_1^2} &= -\frac{Y}{T^2} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt_1^2} &= -\frac{Z}{T^2} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z},\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

dove λ è una quantità da eliminarsi.

Per ottenere le equazioni del moto brachistocrono in un sistema qualunque di coordinate curvilinee q_1, q_2, q_3 nello spazio ovvero q_1, q_2 sopra la superficie, poniamo anzitutto:

$$\frac{dq_k}{dt} = Tp_k, \qquad (7)$$

da cui si dedurrà per $\frac{1}{T}$ un' espressione razionale intera omogenea di secondo grado rispetto alle p_k.

Moltiplichiamo quindi le (4) ovvero le (6) ordinatamente per $\frac{\partial x}{\partial q_k}$, $\frac{\partial y}{\partial q_k}$, $\frac{\partial z}{\partial q_k}$, e poi sommiamo i prodotti: poniamo inoltre:

$$P_k = X\frac{\partial x}{dq_k} + Y\frac{\partial y}{\partial q_k} + Z\frac{\partial z}{\partial q_k}.$$

Avendo presente la seconda delle note forme date da Lagrange alle equazioni generali del moto, è manifesto che si otterranno così le equazioni:

$$\frac{d}{dt_1}\frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial p_k} - \frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial q_k} = -\frac{P_k}{T^2},$$

ovvero ritornando alla variabile indipendente t:

$$\frac{1}{T}\frac{d}{dt}\frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial p_k} - \frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial q_k} = -\frac{P_k}{T^2}, \tag{8}$$

alle quali sono da unirsi le equazioni (7).

§ II.

Nel caso che il mobile sia obbligato a rimanere sopra la superficie (§ I, 5), se il quadrato dell' elemento lineare è dato dalla equazione:

$$ds^2 = Edq_1^2 + 2\,Fdq_1\,dq_2 + Gdq_2^2,$$

dove E, F, G sono funzioni determinate di q_1, q_2, si avrà:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2}\,(Ep_1^2 + 2\,Fp_1p_2 + Gp_2^2). \tag{1}$$

Perciò il sistema (§ I, 8) offre in questo caso:

$$(EG - F^2)\,\frac{1}{T}\,\frac{dp_1}{dt} = \frac{-GP_1 + FP_2}{T^2} + \pi_1, \tag{2}$$

$$(EG - F^2)\,\frac{1}{T}\,\frac{dp_2}{dt} = \frac{FP_1 - EP_2}{T^2} + \pi_2, \tag{3}$$

dove:

$$\pi_1 = \left(F\frac{\partial F}{\partial q_1} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial q_2} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial q_1}\right)p_1^2 + \left(F\frac{\partial G}{dq_1} - G\frac{\partial E}{\partial q_2}\right)p_1p_2$$
$$+ \left(\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial q_2} - G\frac{\partial F}{\partial q_2} + \frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial q_1}\right)p_2^2,$$

$$\pi_2 = \left(\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial q_1} - E\frac{\partial F}{\partial q_1} + \frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial q_2}\right)p_1^2 + \left(F\frac{\partial E}{\partial q_2} - E\frac{\partial G}{\partial q_1}\right)p_1p_2$$
$$+ \left(F\frac{\partial F}{\partial q_2} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial q_1} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial q_2}\right)p_2^2.$$

Le equazioni (2), (3), insieme colle equazioni:

$$\frac{dq_1}{dt} = Tp_1 , \qquad \frac{dq_2}{dt} = Tp_2 , \tag{4}$$

dopo avervi sostituito invece di T il valore dato dalla (1), costituiscono un sistema normale.

§. III.

Il medoto che segue il Del Grosso (*) per far dipendere la integrazione delle equazioni del moto brachistocrono dalla integrazione d'un sistema canonico, si può riassumere così. Ammettendosi dal problema l'integrale delle forze vive:

$$T - U = k ,$$

dove k è una costante arbitraria, si ha:

$$-\frac{X}{T^2} = \frac{\partial V}{\partial x} , \qquad -\frac{Y}{T^2} = \frac{\partial V}{\partial y} , \qquad -\frac{Z}{T^2} = \frac{\partial V}{\partial z} , \tag{1}$$

dove :

$$V = \frac{1}{U + k} .$$

Si ponga quindi:

$$x' = \frac{dx}{ds_1} , \qquad y' = \frac{dy}{ds_1} , \qquad z' = \frac{dz}{ds_1} ,$$

$$T_1 = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2), \qquad H_1 = T_1 - V ,$$

essendo s_1 definita come al § I. Sarà T_1 una funzione omogenea

(*) Del Grosso, Nota sull'equazioni differenziali, che si presentano nei problemi di Meccanica. Giornale di matematiche pubblicato per cura del prof. G. Battaglini, Vol. IV, 1866, pag. 243.

di secondo grado rispetto alle quantità $\frac{dq_k}{ds_1}$ (che denoteremo in questo momento con q'_k) con coefficienti che sono funzioni note delle variabili q_k. Si ponga inoltre:

$$\frac{\partial T_1}{\partial q'_k} = p_k ,$$

e si esprimano quindi T_1, H_1 per mezzo delle variabili q_k, p_k. Allora T_1 diviene una funzione omogenea di secondo grado rispetto alle p_k con coefficienti funzioni delle q_k. Se nei sistemi (§ I, 4, 6) si sostituiscono per $-\frac{X}{T^2}$, $-\frac{Y}{T^2}$, $-\frac{Z}{T^2}$ le espressioni date dalle (1), evidentemente questi sistemi potranno porsi poi sotto la forma:

$$\frac{dq_k}{dt_1} = \frac{\partial H_1}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_k} . \tag{2}$$

Ricordando quindi che, per le posizioni fatte, la funzione caratteristica H_1 contiene necessariamente la costante k delle forze vive, e supposto che si sappia trovare una soluzione completa dell' equazione differenziale parziale corrispondente al sistema (2), sarà facile dedurre da questo sistema le equazioni integrali del problema del moto brachistocrono contenenti complessivamente, oltre la costante k delle forze vive, altre tre o cinque costanti arbitrarie distinte, secondochè è data o no la condizione che il moto debba aver luogo sopra una superficie assegnata.

§. IV.

Ma si può, senza cambiamento della variabile indipendente t, e senza introdurre la costante delle forze vive nelle equazioni differenziali del moto brachistocrono, far dipendere, nella seguente maniera, da un sistema canonico la determinazione degl'integrali non contenenti esplicitamente il tempo, riducendo in ultimo ad una quadratura la determinazione del rimanente integrale contenente esplicitamente il tempo.

Il sistema (§ I, 8) si può porre sotto la forma:

$$T \frac{d}{dt} \frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial p_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} = - P_k \tag{1}$$

Pongo:

$$\frac{\partial \frac{1}{T}}{\partial p_k} = r_k ,$$

e momentaneamente per brevità:

$$\frac{1}{T} = T' .$$

Si avrà:

$$2T' = \sum \frac{\partial T'}{\partial p_k} p_k ,$$

ossia:

$$T' = \Sigma \, r_k p_k - T' ,$$

da cui:

$$dT' = \sum r_k \, dp_k + \sum p_k \, dr_k - \sum \frac{\partial T'}{\partial p_k} dp_k - \sum \frac{\partial T'}{\partial q_k} dq_k ,$$

ovvero:

$$dT' = \sum p_k dr_k - \sum \frac{\partial T'}{\partial q_k} dq_k .$$

Esprimiamo T, T' per mezzo delle variabili q_k, p_k, e distinguiamo con parentesi le derivate parziali prese in quest'ipotesi. Si avrà:

$$dT' = \Sigma \left(\frac{\partial T'}{\partial r_k}\right) dr_k + \Sigma \left(\frac{\partial T'}{\partial q_k}\right) dq_k .$$

Confrontando le ultime due espressioni di dT', se ne deduce:

$$\left(\frac{\partial T'}{\partial q_k}\right) = - \frac{\partial T}{\partial q_k},$$

$$-\frac{1}{T'^2}\left(\frac{\partial T'}{\partial r_k}\right) = p_k .$$

Perciò il sistema (§ I, 7), (1), intendendo che T' sia espresso per mezzo delle q_k, p_k, e ommettendo quindi le parentesi, diviene:

$$T \frac{dq_k}{dt} = - \frac{\partial T}{dr_k},$$

$$T \frac{dr_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - P_k .$$

Ponendo:

$$H = T - U,$$

e osservando che si ha:

$$P_k = \frac{\partial U}{dq_k},$$

il sistema precedente diviene:

$$\left.\begin{aligned} T \frac{dq_k}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial r_k}, \\ T \frac{dr_k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

come giunsi, per via differente, in altro lavoro (*).

Il sistema (2) ammette col sistema canonico:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial r_k}, \\ \frac{dr_k}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(*) Sul moto brachistocrono. Rend. Circ. matem. di Palermo, t. V. 1891.

in comune gl'integrali non contenenti esplicitamente il tempo.

Se non è data la condizione (§ I, 5), prendiamo per q_1, q_2, q_3 le variabili x, y, z, sicchè:

$$p_1 = r_1 = u, \quad p_2 = r_2 = v, \quad p_3 = r_3 = w.$$

La ricerca degl'integrali, non contenenti esplicitamente il tempo, del sistema (3), e perciò anche del sistema (2), dipenderà, come si sa, dalla teoria dei sistemi canonici, dalla ricerca di una soluzione completa dell'equazione differenziale parziale di prim'ordine:

$$\frac{2}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} - U = k, \tag{4}$$

essendo k una costante arbitraria, e dove:

$$r_1 = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad r_2 = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad r_3 = \frac{\partial S}{\partial z}.$$

Se è data la condizione (§ I, 5), la determinazione degl' integrali non contenenti esplicitamente il tempo dipende invece dalla ricerca di una soluzione completa dell' equazione:

$$\frac{2\,(EG - F^2)}{Gr_1^2 - 2Fr_1 r_2 + Er_2^2} - U = k, \tag{5}$$

nella quale:

$$r_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \qquad r_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}.$$

§ V.

Sia:

$$f\,(x, y, z, u, v, w) = h,$$

essendo h una costante arbitraria, un integrale, non contenente

esplicitamente il tempo, delle equazioni (§ I, 2, 3). Si dovrà avere identicamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{dy} v + \frac{\partial f}{\partial z} w - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{X}{T^2} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{Y}{T^2} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{Z}{T^2} = 0 .$$

Di qui si conclude: *Sieno*

$$-\frac{1}{T^2}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad -\frac{1}{T^2}\frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\frac{1}{T^2}\frac{\partial U}{\partial z},$$

essendo:

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

le componenti della forza acceleratrice nel moto d'un punto libero; sieno $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{dy}, \frac{\partial U}{\partial z}$ *le componenti della forza nel moto brachistocrono di un punto materiale. Dagl' integrali, non contenenti esplicitamente il tempo, del primo problema, si deducono immediatamente gl' integrali, non contenenti esplicitamente il tempo, del secondo problema, cambiando*

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} \quad in \quad \frac{1}{T}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{1}{T}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{1}{T}\frac{dz}{dt} .$$

Reciprocamente *se negli integrali, non contenenti esplicitamente il tempo, del secondo problema si cambiano*

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} \quad in \quad T\frac{dx}{dt}, \quad T\frac{dy}{dt}, \quad T\frac{dz}{dt}$$

si otterranno gl' integrali, non contenenti esplicitamente il tempo, del primo problema. In particolare: *La traiettoria è, nei due problemi, rappresentata dalle stesse equazioni, salva la determinazione delle costanti arbitrarie secondo i valori iniziali e le condizioni ai limiti.*

Similmente sia:

$$f(q_1, q_2, p_1, p_2) = h$$

un integrale, non contenente esplicitamente il tempo, del sistema (§ II, 2, 3, 4). Si dovrà avere identicamente:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} p_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} p_2 + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{-GP_1 + FP_2}{T^2} + \pi_1 \right)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial p_2} \frac{1}{EG - F^2} \left(\frac{FP_1 - EP_2}{T^2} + \pi_2 \right) = 0 .$$

Onde: *Sieno*

$$- \frac{1}{T^2} \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad - \frac{1}{T^2} \frac{\partial U}{\partial q_2},$$

dove:

$$T = \frac{1}{2} \left[E \left(\frac{dq_1}{dt} \right)^2 + 2F \frac{dq_1}{dt} \frac{dq_2}{dt} + G \left(\frac{dq_2}{dt} \right)^2 \right],$$

le componenti della forza attiva che sollecita un punto obbligato semplicemente a rimanere sopra una superficie data. Sieno $\frac{\partial U}{\partial q_1}$, $\frac{\partial U}{\partial q_2}$ *le componenti della forza che sollecita un punto obbligato pure a rimanere sopra la stessa superficie, ma colla condizione che il moto sia brachistocrono. Dagl' integrali, non contenenti esplicitamente il tempo, del primo problema, si deducono gl' integrali, non contenenti esplicitamente il tempo, del secondo problema, cambiando senz' altro*

$$\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt} \quad in \quad \frac{1}{T^2} \frac{dq_1}{dt}, \quad \frac{1}{T^2} \frac{dq_2}{dt} .$$

Reciprocamente, *se negl' integrali, non contenenti esplicitamente il tempo del secondo problema, si cambiano* $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dq_2}{dt}$ *in* $T^2 \frac{dq_1}{dt}$, $T^2 \frac{dq_2}{dt}$, *si ottengono gl' integrali non contenenti esplicitamente il tempo, del primo problema.*

In particolare: *Le equazioni della traiettoria nei due problemi coincidono, salva la determinazione delle costanti arbitrarie secondo i valori iniziali e le condizioni ai limiti.*

§ VI.

Cerchiamo in quali casi il sistema (§ I, 2, 3) delle equazioni del moto brachistocrono ammetta un integrale della forma:

$$Au + Bv + Cw + D = h, \tag{1}$$

essendo h una costante arbitraria, e A, B, C, D funzioni di x, y, z, da determinarsi. Affinchè lo stesso sistema ammetta l'integrale (1), si dovrà avere identicamente per valori arbitrari di ciascuna delle sei quantità x, y, z, u, v, w:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} u + \frac{\partial A}{\partial y} v + \frac{\partial A}{\partial z} w\right) u + \left(\frac{\partial B}{\partial x} u + \frac{\partial B}{\partial y} v + \frac{\partial B}{\partial z} w\right) v$$

$$+ \left(\frac{\partial C}{\partial x} u + \frac{\partial C}{\partial y} v + \frac{\partial C}{\partial z} w\right) w + \frac{\partial D}{dx} u + \frac{\partial D}{\partial y} v + \frac{\partial D}{\partial z} w$$

$$- \frac{1}{4} (u^2 + v^2 + w^2)(AX + BY + CZ) = 0 .$$

Tale equazione, siccome u, v, w vi compariscono soltanto esplicitamente, si scinde nelle seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} AX + BY + CZ = 0 , \\ \dfrac{\partial A}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial B}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial C}{\partial z} = 0 , \\ \dfrac{\partial A}{\partial y} + \dfrac{\partial B}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial B}{\partial z} + \dfrac{\partial C}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial C}{\partial x} + \dfrac{\partial A}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial D}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial D}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial D}{\partial z} = 0 . \end{array}\right\} \tag{2}$$

Quest' equazioni sono quelle stesse, che devono essere verificate, affinchè le equazioni del moto d' un punto libero:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

nell'ipotesi che Y, X, Z siano funzioni delle sole coordinate, ammettano un integrale primo della forma:

$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}+D=h\,.$$

Perciò il più generale integrale, della forma (1), del problema del moto brachistocrono è:

$$lu+mv+nw+p\,(zv-yw)+q\,(xw-zu)+r\,(yu-xv)=h,$$

ossia:

$$l\frac{dx}{dt}+m\frac{dy}{dt}+n\frac{dz}{dt}+p\left(z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}\right)+q\left(x\frac{dz}{dt}-z\frac{dx}{dt}\right)$$
$$+\,r\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=hT,$$

essendo l, m, n, p, q, r costanti qualunque. La condizione per le forze è:

$$(l+ry-qz)\,X+(m+pz-rx)\,Y+(n+qx-py)\,Z=0,$$

sicchè U dovrà soddisfare all'equazione:

$$(l+rq-qz)\,\frac{\partial U}{\partial x}+(m+pz-rx)\,\frac{\partial U}{\partial y}+(n+qx-py)\,\frac{\partial U}{\partial z}=0\,.$$

Si ha così questo teorema: (*) *Nel moto brachistocrono d'un punto materiale, se le linee d'azione della forza sollecitante appartengono ad un complesso lineare, il momento della quantità di moto del punto rispetto al complesso è, per tutta la durata del moto, proporzionale alla forza viva.*

Questo teorema è pure conseguenza immediata del teorema

(*) *Cfr.* CERRUTI, *Intorno ad una generalizzazione di alcuni teoremi di Meccanica.* Collectanea Mathematica in memoriam D. Chelini. Milano 1881.

corrispondente relativo al moto libero e dell'osservazione fatta nel § V. Per dedurre la stessa proposizione dalle equazioni (§ IV, 2), (*) si prendano in queste equazioni x, y, z per variabili q_1, q_2, q_3. Allora l'equazione (1) diviene:

$$Ar_1 + Br_2 + Cr_3 + D = h. \qquad (3)$$

Si denotino con K, H i primi membri delle (§ IV, 4), (1) rispettivamente. Seguendo una notazione dovuta a Poisson, si ponga:

$$(K, H) = \Sigma\left(\frac{\partial K}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial r_k} - \frac{\partial K}{\partial r_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right),$$

dove in questo caso, è:

$$k = 3, \quad q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z.$$

Affinchè l'equazione (3) sia integrale d'un problema, è necessario e sufficiente che si abbia identicamente:

$$(K, H) = 0.$$

Sviluppando quest'equazione, si trova che essa si scinde nelle stesse equazioni (2).

§. VII.

Supponiamo che il sistema (§ II, 2, 3, 4) ammetta un integrale della forma:

$$Ap_1 + Bp_2 + C = h, \qquad (1)$$

essendo h una costante arbitraria e A, B, C funzioni di q_1, q_2 da determinarsi. L'equazione (1) si può scrivere:

$$\frac{A\dfrac{dq_1}{dt} + B\dfrac{dq_2}{dt}}{T} + C = h. \qquad (2)$$

(*) *Cfr.* E. PADOVA, Sugli integrali comuni a più problemi di Dinamica, Atti del R. Ist. ven. Vol. I, Serie VI, 1883.

Sia $\frac{1}{\rho}$ un fattore integrante dell'espressione differenziale $Adq_1 + Bdq_2$, e sia:

$$\frac{1}{\rho}\left(Adq_1 + Bdq_2 \right) = dm ,$$

essendo m una funzione di q_1, q_2. Al sistema di coordinate curvilinee q_1, q_2 sostituiamo il sistema delle coordinate curvilinee $m = cost.$ e un altro sistema $n = cost.$, che, per semplicità, supporremo essere quello delle loro traiettorie ortogonali. L' equazione (2) prenderà la forma più semplice:

$$\frac{\rho \frac{dm}{dt}}{T} + C = h .$$

Dunque, continuando a chiamare q_1, q_2 le nuove coordinate curvilinee, si vede che, dato un integrale della forma (1), esso si può sempre ridurre alla forma più semplice:

$$Bp_2 + C = h. \tag{3}$$

Essendosi supposte le coordinate curvilinee q_1, q_2 ortogonali, si ha:

$$ds^2 = Edq_1^2 + Gdq_2^2,$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2}\left(Ep_1^2 + Gp_2^2 \right),$$

e le equazioni (§ II, 2, 3) divengono:

$$\left.\begin{aligned} \frac{E}{T}\frac{dp_1}{dt} &= -\frac{P_1}{T^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q_1} p_1^2 - \frac{\partial E}{\partial q_2} p_1 p_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q_1} p_2^2 , \\ \frac{G}{T}\frac{dp_2}{dt} &= -\frac{P_2}{T^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q_2} p_1^2 - \frac{\partial G}{\partial q_1} p_1 p_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q_2} p_2^2 . \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Affinchè la (3) sia integrale d' un problema, si dovrà avere iden-

ticamente, per valori arbitrari di ciascuna delle quantità q_1, q_2, p_1, p_2:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial q_1} p_1 + \frac{\partial B}{\partial q_2} p_2\right) p_2 + \frac{\partial C}{\partial q_1} p_1 + \frac{\partial C}{\partial q_2} p_2 + \frac{B}{G}\left[-\frac{P_2}{4}\left(Ep^2_1 + Gp^2_2\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q_2} p^2_1 - \frac{\partial G}{\partial q_1} p_1 p_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q_2} p^2_2\right] = 0.$$

Quest'equazione, comparendo p_1, p_2 soltanto esplicitamente, si scinde nelle seguenti:

$$P_2 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial B}{\partial q_2} - \frac{B}{2G}\frac{\partial G}{\partial q_2} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial B}{\partial q_1} - \frac{B}{G}\frac{\partial G}{\partial q_1} = 0, \tag{7}$$

$$B\frac{\partial E}{\partial q_2} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial C}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial q_2} = 0. \tag{9}$$

Queste equazioni sono quelle stesse che devono essere verificate, affinchè le note equazioni:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = P_1,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = P_2,$$

$$\frac{dq_1}{dt} = q'_1, \quad \frac{dq_2}{dt} = q'_2$$

del moto d'un punto obbligato semplicemente a rimanere sopra una superficie, ammettano un integrale della forma:

$$B\frac{dq_1}{dt} + C = h.$$

Dalle (9) si trae che C è costante, ed è chiaro che si può supporre eguale a zero. È evidente che B non può essere identicamente nullo, sicchè la (8) dà:

$$\frac{\partial E}{\partial q_2} = 0 .$$

Da ciò, per un noto teorema di Gauss, si deduce che le linee $q_2 = cost.$ sono geodetiche. Essendo E funzione della sola q_1, se si fa un cambiamento di variabile col porre $\int \frac{dq_1}{\sqrt{E}}$ in luogo q_1, le linee coordinate non sono cangiate, e il quadrato dell'elemento lineare assume la forma più semplice:

$$ds^2 = dq^2_1 + G dq^2_2 .$$

La (7), integrata, offre:

$$B = f(q_2)\, G ,$$

essendo $f(q_2)$ una funzione arbitraria di q_2. Sostituendo quest'espressione di B in (6) e integrando, si ha:

$$G = \frac{\varphi(q_1)}{[f(q_2)]^2} ,$$

dove $\varphi(q_1)$ è una funzione arbitraria di q_1.

Facendo un cambiamento di variabile col porre dq_2 invece di $\frac{dq_2}{f(q_2)}$, con che le linee coordinate non sono cangiate, il quadrato dell'elemento lineare prende la forma più semplice:

$$ds^2 = dq^2_1 + \varphi(q_1)\, dq^2_2 . \qquad (10)$$

Onde: *affinchè il problema ammetta un integrale della forma* (1), *è necessario che la superficie sia di rivoluzione od applicabile sopra una superficie di rivoluzione.* La condizione delle forze è espressa dalla (5), sicchè la funzione di forza U, dipenderà solamente da q_1.

L'integrale (3) diviene:

$$Gp_2 = h, \tag{11}$$

ossia:

$$\frac{G}{T}\frac{dq_2}{dt} = h,$$

dove G è funzione di q_1 soltanto. (*)

§ VIII.

Trovata la forma più semplice a cui si possono sempre ridurre gl' integrali della forma (§ VII, 1), si può procedere come segue, per riconoscere in tutti i casi l' esistenza di siffatti integrali.

Sia data una superficie di rivoluzione od applicabile sopra una superficie di rivoluzione, e prendiamo sopra di essa un sistema di coordinate curvilinee, formato da una serie qualunque di linee geodetiche $q_2 = cost.$ e da quella delle loro traiettorie ortogonali $q_1 = cost.$, sicchè il quadrato dell' elemento lineare della superficie possa prendere la forma:

$$ds^2 = dq_1^2 + Gdq_2^2,$$

essendo G funzione di q_1 soltanto.

Supponiamo che l'equazione (§ VII, 1) sia un integrale delle equazioni del moto brachistocrono sopra la superficie data.

Avendo riguardo alle equazioni (§ II, 2, 3, 4), si dovrà avere identicamente:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}p_1 + \frac{\partial A}{\partial q_2}p_2\right)p_1 + \left(\frac{\partial B}{\partial q_1}p_1 + \frac{\partial B}{\partial q_2}p_2\right)p_2 + \frac{\partial C}{\partial q_1}p_1 + \frac{\partial C}{\partial q_2}p_2$$

$$+ A\left[-(p_1^2 + Gp_2^2)^2 P_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q_1}p_2^2\right] + \frac{B}{G}\left[-(p_1^2 + Gp_2^2)^2 P_2 - \frac{\partial G}{\partial q_1}p_1 p_2\right] = 0.$$

(*) Cfr. Cerruti, memoria citata.

Queste equazioni si scinde nelle seguenti:

$$\frac{\partial C}{\partial q_1} = 0\,, \quad \frac{\partial C}{\partial q_2} = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial q_2} + \frac{A}{2}\frac{\partial G}{\partial q_1} = 0\,, \quad \frac{\partial A}{\partial q_1} = 0\,, \quad \frac{\partial A}{\partial q_2} + \frac{\partial B}{\partial q_1} - \frac{B}{G}\frac{\partial G}{\partial q_1} = 0 \tag{2}$$

$$AGP_1 + BP_2 = 0. \tag{3}$$

Quest' equazioni sono quelle stesse che devono essere verificate, affinchè le equazioni del moto di un punto obbligato semplicemente a rimanere sopra la superficie data, ammettano un integrale della forma:

$$A\frac{dq_1}{dt} + B\frac{dq_2}{dt} + C = h\,.$$

Dalla (1) si vede che C è costante, sicchè questo termine dell' equazione (§ VII, 1) si può supporre identicamente nullo, come nel § precedente.

Alle (2) si può soddisfare, nel modo più generale, in due maniere, cioè in primo luogo con:

$$A = 0\,, \qquad B = G\,,$$

qualunque sia G, purchè, come si è supposto, funzione della sola q_1, e con ciò si ricade nelle formule finali del § VII, e la superficie data può essere una superficie qualunque di rivoluzione od applicabile sopra una superficie di rivoluzione. Oppure, come risulta dalla memoria citata del Cerruti, si può soddisfare alle stesse equazioni con:

$$A = \alpha \cos h\,(q_2\sqrt{\gamma} + \alpha_1)\,,$$

$$\sqrt{G} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}} \cos h(q_1\sqrt{\gamma_1} + \gamma_2)\,,$$

$$B = \lambda G - \frac{\alpha}{2\sqrt{\gamma}} \operatorname{sen} h\,(q_2\sqrt{\gamma} + \alpha_1)\,\frac{\partial G}{\partial q_1}\,,$$

dove $\alpha, \alpha_1, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \lambda$ sono costanti arbitrarie.

In questo secondo caso la superficie data, di rivoluzione od applicabile sopra una superficie di rivoluzione, è a curvatura costante, e l'integrale può, secondo quanto si è detto al § VII, ridursi ad avere la forma che ha nel primo caso.

§ IX.

Supponiamo che il problema del moto brachistocrono di un punto obbligato a rimanere sopra una superficie di rivoluzione od applicabile sopra una superficie di rivoluzione ammetta l'integrale:

$$Gp_2 = h\,,$$

essendo G funzione di q_1 soltanto.

Le forze soddisferanno, come si è veduto, alla condizione:

$$P_2 = 0\,.$$

Perciò U e P_1, sono funzioni della sola q_1. Supponiamo inoltre che sia data la curva brachistocrona, e che si voglia determinare P_1. Dall' integrale dato si ha:

$$p_2 = \frac{h}{G}\,.$$

Dalla prima delle (§ II, 4) si deduce:

$$p_1 = \frac{h}{G}\,\frac{dq_2}{dq_1}\,,$$

onde:

$$T = \frac{2G^2}{h^2\left[G + \left(\frac{dq_2}{dq_1}\right)^2\right]}$$

L'integrale delle forze vive offre:

$$\frac{2G^2}{h^2\left[G+\left(\frac{dq_2}{dq_1}\right)^2\right]}=V+k, \tag{1}$$

essendo k una costante arbitraria, sicchè:

$$P_1=\frac{2}{h^2}\frac{d}{dq_1}\frac{G^2}{G+\left(\frac{dq_2}{dq_1}\right)^2}.$$

Reciprocamente, data P_1, si ha $V=\int P_1\,dq_1$, e quindi l'equazione differenziale ordinaria di primo ordine (1), integrata, ci fornirà l'equazione della curva brachistocrona in termini finiti.

§ X.

Volendo servirsi delle equazioni (§ IV, 2), (*) si osservi che l' equazione (§ VII, 1) equivale alla seguente:

$$A_1 r_1 + B_1 r_2 + C = h, \tag{1}$$

dove:

$$A_1=\frac{AG-BF}{EG-F^2}, \qquad B_1=\frac{-AF+BE}{EG-F^2}.$$

Supponendo le linee coordinate ortogonali, è A_1 eguale o differente da zero, secondochè A è eguale o differente da zero, sicchè, come l' equazione (§ VII, 1) si può ridurre sempre alla forma (§ VII, 3), così l' equazione (1) si può sempre ridurre alla forma:

$$B_1 r_2 + C = h. \tag{2}$$

(*) Cfr. E. Padova, memoria citata.

Indicando con K, H i primi membri del (§ IV, 5), (2) rispettivamente, la condizione necessaria e sufficiente, affinchè la (2) sia integrale di un problema, è che si abbia identicamente:

$$(K, H) = 0.$$

Sviluppando quest' equazione, si trova che essa si scinde nelle seguenti:

$$\frac{\partial C}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial q_2} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_2} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial q_1} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{B_1}{G}\frac{\partial G}{\partial q_2} + 2\frac{\partial B_1}{\partial q_2} = 0. \tag{7}$$

Dalle (3) si vede che si può supporre $C=0$. La (4) ci fornisce la condizione (§ VII, 5) già trovata per la forza. La (5) esprime che E è funzione della sola curvabile q_1, sicchè, ponendo $\frac{dq_1}{\sqrt{E}}$ invece di dq_1, le linee coordinate non sono cangiate, e il coefficiente di dq_1^2 nell' espressione del quadrato dell' elemento lineare diviene $=1$. Perciò si può supporre identicamente $E=1$.

Dalle (6), (7) si deduce facilmente che G avrà la forma:

$$G = \varphi(q_2)\,\psi(q_1).$$

Ponendo quindi $\frac{dq_1}{\sqrt{\varphi(q_2)}}$ invece di dq_2, il coefficiente di dq_2^2 nel-

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare diviene eguale a una funzione di q_1. Le (6), (7) mostrano allora che B_1 è costante, sicchè si può supporre $= 1$. Perciò l'equazione (2) non può essere integrale d'un problema a meno che non si riduca alla forma:

$$r_2 = h\,,$$

la quale equazione, ritornando alle variabili p_1, p_2, diviene identica alla (§ VII, 11) già trovata.

INDICE DEL VOL. III, SERIE IV.ª